EVCLIDE

RINNOVATO.

Ferraveri Gio: Batta

/Fog. ... /Baglioni

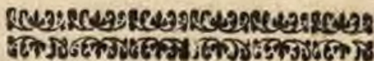
EVCLIDE
RINNOVATO,
OVERO

Gl' antichi Elementi della Geometria, ridotti à maggior breuità, e facilità,

In cui con nuouo, e più sicuro modo si dimostra il trattato delle Proporzioni

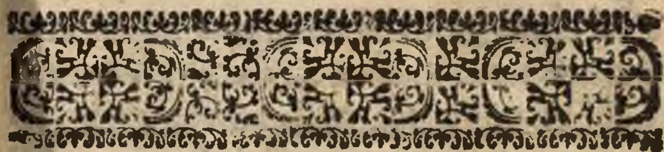
DAL SIG. GIO. ALFONSO BORELLI
Professore delle Mattematiche già nello Studio di Messina, & al presente in quello di Pisa.

Volgarizato da DOMENICO MAGNI Fiorentino, e dall' istesso Autore di nuouo reuisto, e corretto.

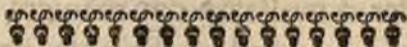


IN BOLOGNA, M.DC.LXIII.

Presso Gio. Battista Ferroni. Con licenza de' Superiori.



IL VOLGARIZATORE A LETTORI.





Li Elementi della Geometria, se ben si considera, non vscirono alla luce del Mondo in que' primi Secoli, ne tanto copiosi, ne così ben concatenati, e disposti: ma d'età in età senza alcun dubbio vennero ad esser ripuliti, ed accresciuti non poco; fin'à tanto, che da Ippocrate Chio furon in miglior grado ridotti. Non mancarono ancora dopo di lui varij Filosofi di fama non ordinaria, che in diuersi tempi impiegarono volontieri l'opera loro in accrescer-

li, e correggerli. E finalmente Euclide Megarense tutto intento à raccorli, ed à migliorarli giusta sua possa ad vna gran perfezione gli fè sormontare. Per lo che il Sig. Gio. Alfonso Borelli Autore della rinnouazione di questi Elementi Geometrici si pose anch'egli nell'animo qualche anno fà di voler dimostrare con maniera più speditiua, e più facile l'istesse cose, che di già aueua dimostrato Euclide; ed in particolare il trattato delle Proporzioni, che, come furono di parere gl' Arabi, e frà i nostri moderni il Benedetti, ed alcuni altri, manca di quella euidenza, che le cose Geometriche sogliono, e deuono auere. Il che essendo stato da esso in tutto, e per tutto felicemente adempito; & auendo moltissimi, & in particolare gli Scolari dello Studio Pisano per esperienza prouato quant' vtile, e facilità apportasse loro questo rinnouato Euclide, furono accesi di desiderio più d'vno di vederlo di nuouo comparir

fuori

fuori nella vulgar nostrà lingua, à prò, e consolazione di coloro, che mancheuoli dell'intelligenza della Latina, anno auuto dalla natura ingegno capace di questa scienza, e di essa non mediocremente son vaghi. Di modo che essendo io stato più d'vna volta richiesto di volgarizare questi Elementi Geometrici, non volli da principio à patto alcuno applicarci il pensiero; ne mi sarei punto da tale risoluzione allontanato, se in vltimo all'instanze d'alcuno, che à ciò mi persuadeua, mi fosse stato lecito di preferire il mio gusto. La qual cosa per più d'vn rispetto non mi venendo permessa; mi diedi à seguire con la douuta riuerenza l'altrui: non reputando douermi ciò sconueneuole riuscire, ne d'alcun biasimo, mentre che ne il Pena, ne l'Atellando, ne Federigo Commandino, vomini di tanta stima, non si sdegnarono prima di me di prendersi somigliante fatica. Si che conferito prima coll'Autore il

mio proponimento, co'l ſuo amoreuole, e ſincero conſiglio m' accinſi all' opera. Ebbe egli per ben fatto, che nel tradurre io laſciaſsi da parte alcune annotazioni, e dichiarazioni, che ſono in quel libro, come quelle, che deuono ſeruire per gli più auanzati in queſta ſcienza: ed eſſer fatta queſta traduzione ſolo per gli principianti, in grazia de' quali ſi meſſe egli à variare alcune propoſizioni, per mezzo delle quali ad eſſi più s' ageuolaſſe, e ſi rendeſſe più corta la ſtrada intrapreſa. E perche la breuità, che ti vien promeſſa, non t' abbia à fare ſmarrir l' vſo delle Propoſizioni d' Euclide, citate ad ogni piè ſoſpinto ne' libri de' Mattematici, hò poſto l' Indice di eſſe, ſecondo l' ordine di Teone, nel principio di queſto libretto, in virtù del quale aurai il comune, e da tutti vſato Euclide. Mi reſta adeſſo di farti ſapere, che incontrando in queſta traduzione qualche vocabolo non Toſcano, e principalmente ne i termini, non

ti deua per questo recar merauiglia: perche se bene aurei potuto per auuentura tutti in questa lingua ridurgli, hò nulladimeno giudicato meglio fatto il lasciargli stare in quella guisa, che sono tutto giorno adoperati da i Professori; & udonsi oggimai per la tanta domestichezza, come nostrali, pronunziare, poco meno, che da tutti: tanto più che secondo l'insegnamento del Padre della Romana eloquenza, quando à vn traduttore torna meglio in acconcio il nome straniero, che il natiuo senza punto di scrupolo pare che gli si permetta il liberamente valersene. Riceui adunque per ora questi cinque libri de' Piani con lieta fronte: mentre io spero di douer darti in breue volgarizzati quelli de' Solidi, qualunque volta io m'accorga, che questa traduzione ti sia grata.

Viui felice.

PRO-

PROPOSIZIONI D'EVCLIDE

Secondo la forma, & ordine vulgato di Teone, con i luoghi, ne' quali le medesime Proposizioni d'Euclide si ritrouano in quest' Opera.

LIBRO PRIMO.

po

posti à gl'eguali angoli. saranno frà loro eguali, l. 1. pr. 20. 44

7 *Nella medesima retta linea non si constituiranno in diuersi punti due linee rette eguali à due medesime rette linee l'vna all'altra dalle medesime parti, ch'abbiano i medesimi termini, che le prime, cauasi dal lib. 1. prop. 7.* 22

8 *Se due triangoli anno due lati eguali à due lati l'vno all'altro, & anno la base eguale alla base: auranno ancora l'angolo contenuto da eguali lati eguale all'angolo, lib. 1. prop. 7.* 22

9 *Diuidere per mezzo vn angolo rettilineo dato, lib. 1. prop. 8.* 25

10 *Diuidere per mezzo vna data retta linea terminata, lib. 1 prop. 9.* 26

11 *Tirare vna linea retta perpendicolare ad vna data retta linea da vn punto dato in essa, lib. 1. prop. 10.* 27

12 *Sopra vna data retta linea infinita da vn punto dato, che non sia in essa, tirare vna linea retta perpendicolare, lib. 1. prop. 11.* 28

13 *Quando vna linea retta stando sopra vn' altra retta linea fà gl'angoli, ò gli farà ambedue retti, ò eguali à due retti, lib. 1. prop. 12.* 29

14 *Se ad vna retta linea, & ad vn punto, che sia in essa due linee rette non poste dalle medesime parti, facciano gl'angoli conseguenti eguali à due retti, esse linee saranno per diritto frà loro, lib. 1. prop. 13.* 31

15 *Se due linee rette si seghino insieme, faranno gl'angoli, che sono alla cima eguali frà loro, lib. 1. corol. della prop. 5.* 20

16 *Prolongandosi vn lato di ciascun triangolo, l'angolo esteriore è maggiore dell' vno, e l'altro interiore, & opposto, lib. 1. cor. della prop. 18.* 42

17 *Due angoli di ciascun triangolo presi in qualunque modo sono minori di due retti, lib. 1. cor. della prop. 18.* 42

18 *Il maggior lato di ciascun triangolo è sottoposto al maggior angolo, l. 1. p. 19.* 43

Al

19 *Al maggior angolo di ciascun triangolo è sottoposto il maggior lato, lib.1.pr.20. fac.* 44

20 *Due lati di ciascun triangolo presi in qual si voglia modo sono maggiori del rimanente, lib.1.pr.21.* 45

21 *Se da i termini d'vn lato del triangolo si constituiscano due linee rette di dentro: queste saranno minori delli due lati del triangolo, ma cõterranno l'angolo maggiore, lib.1.prop 22.* 47

22 *Da tre linee rette, che siano vguali à tre rette linee date constituire vn triangolo; ma bisogna, che due siano maggiori della rimanente, prese in qual si voglia modo; percioche due lati di ciascun triangolo, presi in qual si voglia modo, sono maggiori del rimanente, lib 1.pr.23.* 48

23 *Nella data retta linea e nel punto dato in essa constituire vn' angolo rettilineo vguale ad vn' altr' angolo rettilineo dato, lib.1.pr.24. fac.* 50

24 *Se due triangoli anno due lati vguali à due lati l'vno all' altro, e l'angolo maggiore dell' angolo, che è contenuto da linee rette vguali, aueranno ancora la base maggior della base, lib.2. corol.2. della pr.6.* 82

25 *Se due triangoli anno due lati vguali à due lati l'vno all' altro, & la base maggior della base, aueranno ancora l'angolo maggiore dell' angolo, chi da lati vguali è contenuto, lib.2. cor.2. della prop.6.* 82

26 *Se due triangoli anno due angoli vguali à due angoli l'vno all' altro, & vn lato vguale ad vn lato, che è frà gli angoli vguali, ò che è sottoposto ad vno delli vguali angoli, auerãno ancora gli altri lati vguali à gli altri lati l'vno all'altro, & l'angolo rimanente vguale al rimanente, lib.1.prop.25.* 51

27 *Se cadendo vna linea retta sopra due linee rette, fà gli angoli alterni vguali frà loro, saranno le linee rette pa-*

rallele,

stituiti

LIBRO II.

me

me col quadrato dell' altra parte lib. 5. prop 20. 282

8 *Se vna linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto quattro volte da tutta la linea, & da vna delle parti insieme col quadrato dell'altra parte, sarà vguale al quadrato, che si fà da tutta la linea, & dalla detta parte, si come da vna linea sola, lib 5. pr. 21.* 283

9 *Se vna linea retta sia segata in parti vguali, & in parti disuguali, i quadrati, che si fanno dalle parti disuguali, sono doppij del quadrato della metà, & del quadrato di quella linea, che è frà gli segamenti, lib 5 pr 23.* 286

10 *Se vna linea retta sia segata per mezzo, & vi si aggiunga vn'altra linea per dritto, i due quadrati, che si fanno da tutta la linea con la giunta, & dalla giunta sono doppij del quadrato della metà, & del quadrato, che si fà dalla metà, & dalla giunta, si come da vna sola linea, lib. 5. pr. 23.* 286

11 *Segare vna linea retta data talmente, che il rettangolo contenuto da tutta la linea, & da vna delle parti sia vguale al quadrato dell' altra parte, lib. 4. pr 25.* 233

12 *Ne' triangoli ottusiangoli, il quadrato, che si fà dal lato sottoposto all' angolo ottuso. è tanto maggiore delli quadrati fatti da i lati, che l'angolo ottuso comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da vno de' lati, che sono d'intorno all' angolo ottuso, cioè da quello nel quale prolungato cade la perpendicolare, & dalla linea presa di fuori della perpendicolare verso l'angolo ottuso, lib. 5. prop. 28.* 296

13 *Ne' triangoli acuti angoli, il quadrato che si fà dal lato sottoposto all' angolo acuto, è tanto minore delli quadrati fatti da i lati, che l'angolo acuto comprendono quãto è il rettangolo contenuto due volte da vno de lati, che sono d'intorno all' angolo acuto, cioè da quello, nel quale*

LIBRO III.

venza concaua, la maggiore di tutte sarà quella, che passa per lo centro, & dell' altre la più vicina à quella che passa per lo centro, sarà sempre maggiore della più lontana: ma di quelle che cadano sopra la circonferenza curua, la minore sarà quella, che è frà il punto preso, & il diametro, & dell' altre la più vicina alla minore sarà minore della più lōtana: & due sole vguali cadano dal punto nel cerchio dall' vna, & l'altra parte della minore, lib.2.prop 6. fac. 78

9 Se dentro al cerchio si pigli qualche pūto, & da quello sopra il cerchio caschino più di due linee rette vguali, il punto preso sarà centro del cerchio, lib.2.cor.1.della pr. 6.fac. 82

10 Vn cercho non sega vn' altro cerchio in più di due pūti, lib 2 prop.7. 83

11 Se due cerchi si tocchino di dentro, & si piglino i lor centri, la linea retta, che congiunge i centri, prolungata caderà nel toccamento, lib.2. prop 8. 84

12 Se due cerchi si tocchino di fuori, la linea retta, che congiunge i centri loro passerà per lo toccamento, lib.2 prop. 8.fac. 84

13 Il cerchio non tocca vn' altro cerchio in più d'vn punto, ò lo tocchi di dentro, ò di fuori, lib.2.pr.9. 85

14 Nel cerchio le linee rette vguali sono vgualmente distanti dal centro, & quelle che sono vgualmente distanti dal centro, sono frà loro vguali, lib.2.pr 10. 87

15 Nel cerchio la maggiore di tutte è il diametro, e dell' altre sempre la più vicina a quella, che passa per lo centro è maggiore della più lontana, lib.2 pr.11. 89

16 Quella linea, che dalla estremità del diametro è tirata ad angoli retti cade fuori del cerchio, e nel luogo che è frà la linea retta, e la circonferenza non cade alcun' altra linea, e l'angolo del mezzo cerchio è maggiore d' ogn' an-

LIBRO V.

dall' vna della parte tratta dall' altra, sarà la rimanente moltiplice della rimanente, come tutta di tutta, lib 3 cauasi dalla pr. 15. 162

6 Se due grandezze sieno vgualmente moltiplici di due altre grãdezze, & siano tratte da' loro parti vgualmente moltiplici delle medesime, saranno le rimanenti, ò vguali alle medesime, ò vgualmente moltiplici di esse, lib. 3 cauasi dalla prop 22. 176

7 Le grandezze vguali alla medesima anno la medesima proporzione, & la medesima alle vguali, lib. 3. prop. 3. fac. 141

8 Delle grandezze disuguali la maggiore alla medesima hà maggior proporzione, che la minore: & la medesima alla minore hà maggior proporzione, che alla maggiore, lib 3. pr. 2. 139

9 Quelle grandezze, che alla medesima anno la medesima proporzione sonò vguali frà loro, & quelle alle quali la medesima hà la medesima proporzione, sono ancora frà loro vguali lib 3 pr. 4. 143

10 Delle grandezze, che anno proporzione alla medesima, quella che hà maggior proporzione, è maggiore, & quella, alla quale la medesima hà maggior proporzione, è minore, lib 3 pr 5. 144

11 Quelle proporzioni, che sono le medesime ad vna medesima, sono ancora le medesime frà loro, lib. 3. prop. 7. fol. 147

12 Se quante grandezze si vogliono siano proporzionali, come vna dell' antecedenti è ad vna delle consequenti così saranno tutte l'antecedenti a tutte le conseguenti, lib. 3. prop. 15. 162

13 Se la prima alla seconda abbia la medesima proporzione, che la terza alla quarta, & la terza alla quarta abbia maggior proporzione, che la quinta alla sesta, ancora la prima alla seconda auerà maggior proporzione, che la quinta alla sesta, lib. 3 propoj 6. 145

Se

a due

LIBRO VI.

I lati

rispondono frà loro contrariamente: & quei parallelogrammi, ch'anno vn'angolo vguale ad vn'angolo, de'quali i lati d'intorno a gli angoli vguali si rispondono contrariamente, sono fra loro vguali, lib 4 pr.14. 210

15 De' triangoli vguali, ch' anno vn'angolo vguale ad vn' angolo; i lati d'intorno a gli angoli vguali si rispondono fra loro contrariamente; & quei triangoli, ch' anno vn' angolo vguale ad vn' angolo, de' quali i lati d' intorno a gli vguali angoli si rispondono cõtrariamente, sono vguali frà loro, lib.4.pr.14. 210

16 Se quattro linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dall' estreme è vguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo; & se il rettangolo contenuto dall'estreme sia vguale al rettangolo, che si contiene da quella di mezzo, le quattro linee rette saranno proporzionali, lib.4.cor. 1.dalla prop. 14. 212

17 Se tre linee rette siano proporzionali; il rettangolo contenuto dall' estreme è vguale al quadrato, che si fà di quella di mezzo; & se il rettangolo contenuto dall' estreme sia vguale al quadrato che si fà da quella di mezzo, le tre linee rette saranno proporzionali, lib. 4 cor. 2. della prop. 14. 213

18 Dalla data retta linea descriuere vn rettilineo simile, & similmente posto ad vn rettilineo dato, lib. 4. prop. 16. 215

19 I triangoli simili sono in proporzione doppia di quella, ch' anno i lati homologhi frà loro, lib.4. pr.15. 214

20 I poligoni simili si diuidono in simili triangoli, & vguali di numero, & homologhi a tutti; & il poligono al poligono, hà proporzione doppia di quella, che hà il lato homologo al lato homologo, lib. 4.prop.17. 218

21 I rettilinei simili ad vn medesimo rettilineo, sono ancora simili frà loro, lib 4.

cor.

LIBRO X.

LIBRO XII.

ne; & le porzion maggiori di quelle saranno vguali al lato del pentagono, lib. 5. prop. 7. fac. 252

9 Se i lati dell' hessagono, & del decagono descritti nel cerchio sia composti, sarà tutta la linea segata, secondo l'estrema & mezza proporzione: & la porzion maggiore sarà il lato dell' hessagono, lib. 5. prop. 8. 254

10 Se nel cerchio si descriua il pentagono equilatero, il lato del pentagono può il lato dell' hessagono, & del decagono, descritti nel medesimo cerchio, lib. 5 pr 32. 304

12 Se nel cerchio sia descritto il triangolo equilatero, il lato del triangolo è in potenza triplo del semidiametro del cerchio, lib. 5. prop. 30. fac. 299



DI EVCLIDE RINNOVATO

Da Gio. Alfonso Borelli.

LIBRO I.

LA Geometria, frà tutte le Matematiche discipline principalissima, considera le grandezze, & qualsiuoglia contemplazione scientifica, che circa à tal soggetto può farsi; ò si raggira intorno alla considerazione della struttura, con la quale esse grandezze vengon formate, ò intorno alla considerazione dell'essenziali proprietà, ò vogliam dire passioni delle medesime. Ora conciosia cosa, che alcune strutture, e proprietà di grandezze siano in natura così facili, ed euidenti, che non solamente niun faticoso ricercamento non addimandano, ma chi che sia il quale dirittamente discorra, tosto loro acconsente; ed essendouene altre ancora per il contrario tanto malageuoli, che non si possono, ò debbono in modo alcuno concedere senza proua: e perche insieme con esso noi è nato l'incaminarci per vna strada, che dalle cose, che ci son note, ne conduca alle ignote (generandosi

ogni dottrina intellettiua da vna qualche precedente cognizione) : quindi è, che l'euidenti strutture, e proprieta delle grandezze deuon da noi pigliarsi come principij, da'quali scientificamente discorrendo, l'altre oscure, e difficili si deduchino.

Somiglianti speculazioni, ò facili, ò difficili ch'elle siano, furono poi sempre chiamate proposizioni; essendo che in quasiuoglia di loro si propone al nostro intelletto qualche cosa da cōtemplarsi. E' noto adunque, che i principij della Geometria sono le proposizioni, che spongono vn'euidente struttura, ò proprieta delle grandezze. E perche molte volte accade, che le dette grandezze, le cui strutture, ò proprieta sono euidenti, ò non abbiano il proprio nome, ò pur ne abbiano alcuno equiuoco, e diuerse cose significante, è però necessario (acciò che qualsiuoglia grandezza resti da qualunque altra distinta) l'assegnare à ciascheduna, che ne sia senza, vn nome con il quale possa chiamarsi, e circa à quelli che l'anno, dichiarar d'esso il proprio, e vero significato. Laonde tre saranno i generi de' principij della Geometria; de i quali il primo sarà quello nel quale si dichiara, ò si assegna il nome à qualche grandezza, che abbia vn'euidente struttura, ò manifesta proprietà: E si chiama Diffinizione.

Il secondo, nel quale si spone qualche struttura euidente di quella grandezza, il nome della quale è stato già assegnato, e riceuuto dall'vso.

E si

E si chiama Petizione, ò voglià dire Domanda.

Il terzo, nel quale si manifesta vn' euidente proprieta di vna grandezza già nominata: E si chiama Dignita, ò Assioma, ò Pronunciato, ouero notizia commune.

E perche somiglianti principij, essendo notissimi, non si possono dimostrare; perciò si porrà solamente il catalogo loro nel fronte di questa scienza, acciò poi (argomentando con sillogismi dimostratiui) se ne cauino da loro le verità dell' altre nascoste proposizioni, le quali ancora si suddiuidono; poiche quelle nelle quali si considerano le strutture difficili delle grandezze si addimandano Problemi.

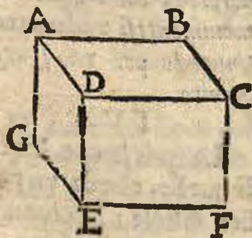
Ma quelle nelle quali si cõtemplano le difficili proprietà delle medesime, si chiamano Teoremi.

DIFFINIZIONI.

I.

L'Estremità, ò termini di qualunque corpo considerati dall' intelletto senza profondità, si chiamino Superficie.

Quali sono le ABCD, & DEFC.



II.

I termini di qualunque superficie cõsiderati senza niuna larghezza, si chiamino Linee.

Quali sono le AB, & AD.

III.

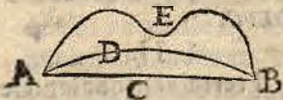
L'estremità della linea considerate senza alcuna lunghezza, si chiamino Punti.

Quali sono i termini A, e B.

Benche tali quantità non si possano ritrouare ciascheduna da per se distinta, certa cosa è, che si ritrouano veramente ne' corpi, ed è lecito considerare l'vna senza l'altra; perche in qualsiuoglia corpo quello, che si vede, ò tocca è la sola esteriore superficie; e quando ei si riuolge intorno à se medesimo, vi è pure qualche cosa, che non si muoue, distinta da quelle, che si riuoltano. Ne è possibile, che la parte immobile sia corpo, auuenga che tutto il corpo si muoue: onde necessariamente conuiene, che vna sola linea semplicemente lunga sia quella, intorno alla quale si fà il moto: i termini indiuisibili della quale si chiaman punti.

E' dunque cosa assai manifesta, che la linea può esser generata dal continuo, é successiuo muouimento del punto; la superficie dal cammino transuersale della linea; e finalmente il corpo del moto pur trasuersale della superficie.

Le quali tre specie di quantità continua possono da noi imaginarsi di grandezza infinita, se però ci imagineremo, che i detti loro mouimenti si vadano continuando per vno spazio infinito.



IV.

La più breue Linea di quelle, che da vn punto ad vn' altro possono esser distese: la chiamo Retta.

Come

Come la linea ACB se ella è la breuissima frà le ADB, & AEB, la chiamo Retta.

V.

La superficie, alla quale vna medesima linea retta per tutti i versi si può adattare, chiamisi Piana.

Se alla superficie ABCD, si può adattare la retta linea MO, in maniera, che conbaci per tutti i versi, come in MN, MG &c. si chiami Superficie Piana.

V I.

Di due rette linee, che si tocchino in vn punto, e non siano distese in dritto; la quantità, ò misura dell' inclinazione dell' vna verso l'altra; si chiami Angolo Piano.

Se le due rette linee AB, & AC si tocchino in A, e

non siano poste in dritto, chiamo angolo piano, non la quantità delle linee BAC, ne lo spazio compreso da esse, ne la distanza, ò relazione loro, ma quella tanta e determinata inclinazione, ò piegamento della linea AC, verso l'altra AB.

VII.



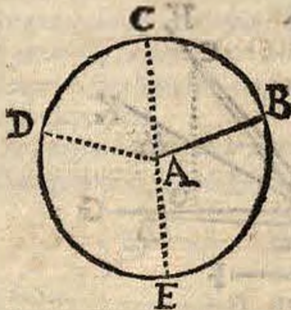


La superficie piana contenuta da vno, ò più termini, si chiama Figura.

Quali sono le A, e B.

VIII.

La figura, che è descritta dal riuolgimento d' vna linea retta posta in vn piano intorno ad vn' estremo suo punto fisso, fin tanto che ella ritorni à quel medesimo luogo, donde auea cominciato à muouersi, si chiami Cerchio. Il punto, che resta fisso si chiami centro, e quella linea, che è disegnata dall' altro estremo termine, sia detta circonferenza: E qualsiuoglia retta linea tirata dal centro alla circonferenza del Cerchio, si nomini suo Raggio, ouero Semidiametro.

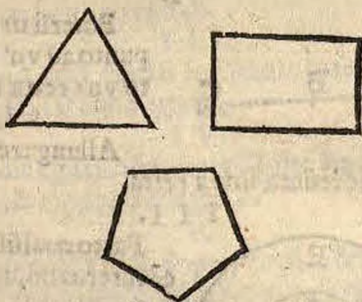


Se la retta AB sarà riuoltata intorno al suo punto fisso A, dirassi la superficie BDE cerchio, la linea curua BCDE circonferenza, il punto A centro, la retta AB Raggio, ò Semidiametro.

Le

I X.

Le figure piane, le quali ſon contenute da rette linee, ſi chiamino Rettilinee.



X.

E quelle, che ſon contenute da tre rette linee ſi nominino Trilatere, ouero Triangoli.

X I.

Le contenute da quattro Quadrilatere, ouero Quadrangoli.

X I I.

E finalmente le contenute da maggior numero ſi dicano Moltilatere, ouero Poligone, prendendo il nome dalla moltitudine de' lati, che le contengono, ò degli angoli, che ſono in eſſe.

XIII.

Vna grandezza ſi chiama miſura d'vn'altra, quando ella preſa molte volte, le è eguale per l'appunto.

C

A B

PETIZIONI, OVERO DOMANDE.

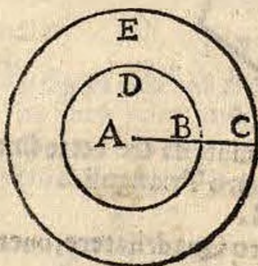
I.

Poterſi tirare da vn punto ad vn' altro pũto vna retta linea.

I I.

Allungare à dirittu tura la medeſima linea retta.

I I I.



Fatto qualſiſia cẽtro, ed interuallo, deſcriuere vn cerchio.

I V.

E data qualſiuoglia grandezza poterſene intendere vn'altra maggiore, o minore della medeſima.

Non eſſendo tali operazioni Meccaniche, ma intellettuali, non à dubbio, che ſia lecito far le, non richiedendoſi altra operazione, che applicar la mente à quelle tali grandezze, che ſono veramente in natura.

ASSIOMI, OVERO PRONVNCIATI.

I.

Quelle coſe, le quali ſono eguali ad vna medeſima, ſono eguali tra loro. E quella, che è maggiore, o minore dell'vna dell'eguali, è anche

che maggiore, o minore dell'altra. E per il contrario.

I I.

Se á cose eguali sono aggiunte cose eguali, gli aggregati saranno eguali.

I I I.

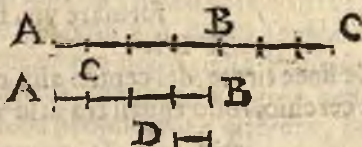
E se da cose eguali son leuate cose eguali, le rimanenti saranno eguali.

I V.

Le cose eguali aggiunte, ò tolte via da cose diseguali, le rendono disegua li.

V.

Le cose, che sono doppie triple, &c. ouero la metá d'vna cosa medesima, o di cose eguali, sono ancor' esse eguali.



V I.

Se vna medesima grãdezza misura due grandezze, misurerá ancora il composto loro, e la loro differenza.

V I I.

Il tutto è maggiore della sua parte.

V I I I.

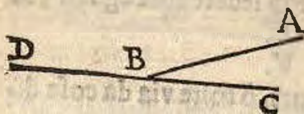
Il tutto è eguale à tutte le sue parti insieme prese.

Quel-

I X.

Quelle cose, che si combaciono, o si adattano perfettamente, sono eguali fra loro.

E quelle cose, che sono eguali potranno combaciarsi per opra dell' intelletto, trasportando, ouero piegando le loro parti, se farà di mestieri.



X.

Due rette linee, che concorrino, e si seghino l'vna l'altra, non anno alcuna parte cōmune.



X I.

Due rette linee possono si comporre vn' angolo, ma non già chiudere vno spazio, o formare vna figura.

X I I.

Tutte le linee tirate dal centro alla circonferenza del cerchio, sono eguali tra di loro.

X I I I.

Se vna medesima retta linea sarà tutta collocata dentro due figure, aueranno quelle figure qualche parte commune, e si segheranno scambieuolmente.



PRO.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I.

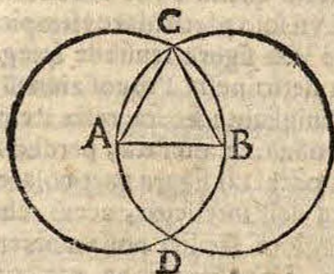
Sopra vna data retta linea terminata formare vn triangolo, che abbia tutti e tre i suoi lati eguali; e nominisi poi tal figura Triangolo equilatero.

Euclid. prop. 1. del lib. 1.

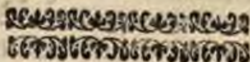
I Problemi anno per lo più cinque parti, cioè à dire, Proposizione, Esposizione, Costruzzione, Dimostrazione, e Conclusione. La Proposizione palesa la cosa data, ouero concessa, & in oltre dichiara tutto quello, che deue farsi. L'Esposizione con vn solo particolare esempio, ouero con qualche vna figura sensibile spiega quello, che s'era detto nella Proposizione, ne per questo in somigliante figura resta l'vniuersalitá della proposizione alterata, perche si mette dauanti à gli occhi tal figura particolare, solo per men fatica dell'intelletto, acciò, che egli con molto maggiore facilità possa vniuersalmente discorrere. La costruzzione, particolarmente ne'problemi, è mai sempre necessaria; Auuengache ella mette in esecutione quello, che nella Proposizione si comanda, che sia fatto, ò più tosto considera l'intellettuale operazione, mediante la quale tal costruzzione formale sciētificamente si può comprendere. La Dimostrazione, argomentando dimostratiuamente da primi principij, raccoglie legittimamente essere stata

ta fatta la costruzione gia comandata. E finalmente la Conclusione è vn certo epilogo di tutta la proposizione, che ci auuertisce, essere stato ormai fatto quello, che nella proposizione s'imponeua, che si facesse. Ne stimo essere stata cosa superflua l'auer accennato in questa prima proposizione per vna volta solamente le cose predette, le quali, benche in altre proposizioni non si pongono, vi si deono non di meno intender sempre.

ESPOSIZIONE.



SIa dunque la data retta linea AB, sopra di lei si dee formare il triangolo, che habbia tutti, e tre i suoi lati eguali. Questa linea AB, benche sia di vna tale determinata misura, contuttociò l'intelletto la deue comprendere come rappresentatiua di qualsiuoglia dell'infinite, che si posson proporre.



CO-

COSTRVZIONE.

FAtto centro A in virtù della terza domanda, con l'interuallo della retta AB,si descriua il cerchio CDB. In oltre fatto centro B con l'interuallo della medesima retta BA, *a* si descriua l'altro cerchio CAD. E perche la medesima retta linea AB è tutta collocata dentro ambedue i cerchi CBD, & CAD. Adunque (mediante l'assioma tredicesimo) questi due cerchi si segano scambieuolmente: e perciò ancora le circonferenze si segheranno l'vna l'altra in qualche punto per esser linee, che per larghezza non si possono diuidere. Posto adunque, che il punto del segamento sia C, *b* tirisi dal punto A al punto C vna retta linea, e parimente se ne tiri vn'altra dal punto B al punto medesimo C. Quiui resta perfezzionata la costruzione, auendo noi formato la figura trilatera ABC, la quale dico essere ancora di lati eguali.

a *Dom.3.*

b *Dom.1.*

DIMOSTRAZIONE.

PErche le due rette linee AB, & AC son tirate dal centro A alla circonferenza del cerchio BCD: *c* adunque la retta AC è eguale alla retta AB. Di più perche le rette BC, & AB son tirate dal centro B alla circonferenza del cerchio CAD, *d* la retta BC sarà eguale alla medesima retta BA. Adunque cosi la AC, come la CB

c *Ass.12.*

d *Ass.12.*

sono

e *Aß.1.* sono eguali alla medesima retta AB. Per la qua cosa e la AC, & la CB sono eguali tra di loro. E le tre rette linee AB, BC, & CA, le quali chiug gono il triangolo ABC sono tutte eguali.

CONCLVSIONE.

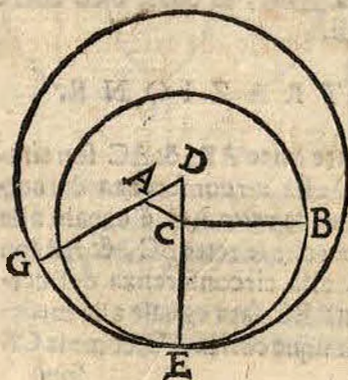
ADunque sopra la data retta linea AB ab biamo formato vn Triangolo racchiuso da tre lati eguali, il che nella proposizione ci era comandato che doueßimo fare. Chiamisi ora cotal figura Triangolo Equilatero.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA II.

Da vn punto dato, tirare vna retta linea eguale ad vn altra data retta linea.

Euclide prop. 2. del 1.



SIa il dato punto A, e la data retta linea sia BC. Dal punto A si deue tirare vn altra retta linea, che sia eguale alla retta BC. *a* Dal punto C al punto A si tiri, se e v'n'è di bisogno, vna retta linea

a *Dom.1.*

b e so-

e sopra la retta CA, si descriua il triãgolo equilatero ADC, *c* e fatto centro C con l'interuallo CB, si descriua il cerchio BE, *d* e la retta DC si allunghi dirittamente alla volta del punto C, finche seghi nel punto E la circonferenza del cerchio. E similmente *e* fatto centro D, con l'interuallo DE, si descriua l'altro cerchio EG, che seghi la retta linea DA, allungata indefinitamente nel punto G. Dico la retta AG essere eguale alla data retta BC. Perche le rette DE, e DG son tirate dal centro alla circonferenza del cerchio EG: *f* esse dunque sono eguali tra di loro. Ma da queste si leuino via le parti eguali AD, & CD (lati del triangolo equilatero ABC) *g* adunque il residuo AG è eguale al residuo CE. Ma anche la retta CB è eguale alla retta CE, *h* per essere ambedue tirate dal centro alla circonferenza del cerchio BE. Adunque le due rette BC, & AG sono eguali ad vna terza CE, e *i* perciò anco sono eguali tra di loro. Per la qual cosa si è distesa dal punto A la retta AG eguale alla data BC. Il che si doueua fare.

b *prop.* 1.
c *Dom.* 3.
d *Dom* 2.
e *Dom.* 3.
f *Ass.* 12.
g *Ass.* 3.
h *Ass.* 12.
i *Ass.* 1.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA III.

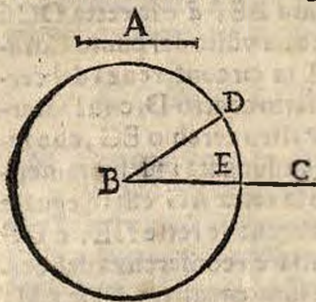
Date due rette linee diseguali, dalla maggiore tagliarne vna eguale alla minore.

Euclid. prop. 3. del 1.

Sia A la retta linea minore, CB la maggiore. Deuesi dalla maggiore CB tagliare vn pez-

a *Prop. 2.* zo eguale alla minore A *a*. Si tiri dal punto B la retta linea BD, che sia eguale alla retta A, *b* e

b *Dom. 3.*



fatto centro B con lo interuallo BD, si descriua il cerchio DE, che seghi nel punto E la retta CB. Dico che BE è il pezzo tagliato eguale alla retta A. Perche BE è eguale à BD, *c* essendo ambe due queste tirate dal

c *Ass. 12.*

centro alla circonferenza del cerchio DE: e A per la costruzzione è eguale alla medesima BD. Onde A, e BE essendo eguali ad vna terza *d* sa-

d *Ass. 1.* ranno parimente eguali tra loro, Adunque date due rette linee &c. Il che si doueua fare.

PROPOSIZIONE IV.

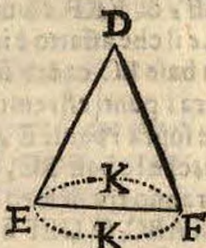
TEOREMA I.

Euclid. prop. 4. del 1.

Se in due triangoli intorno à gli angoli della cima eguali, i due lati dell' vno saranno eguali à i due lati dell' altro ciascheduno al suo: le base de i medesimi Triangoli saranno eguali, il triangolo al triangolo, e di tutti gli altri angoli quegli ad vno ad vno saranno eguali fra di loro, à i quali saranno opposti lati eguali. Chiaminsi somiglianti figure Triangoli similmente Eguali.

Sie-





Siano due triangoli ABC, & DEF, i di cui angoli alla cima A,& D siano eguali tra loro, e il lato AB sia eguale al lato DE: e similmēte il lato AC sia eguale al lato DF. Dico che la base BC è vguale alla base EF,il triangolo ABC eguale al triāgolo DEF, e l'angolo B eguale all'angolo E, a' i quali sono opposti i lati eguali AC,& DF,e parimente l'angolo C è eguale all'angolo F, a'quali sono opposti gli altri due lati eguali AB,& DE. Soprapongasi con l'intelletto il triangolo ABC al triangolo DEF, dimando che il punto A cada sopra il punto D, e la retta AB cada sopra la retta DE, necessariamente *a* le due rette linee AB, & DE si combascieranno, similmente mediante l'equalità l'angolo A si adatterà all'angolo D; e perciò AC caderà sopra DF, *b* e per essere tra loro eguali si adatteranno: sì che il punto C caderà sopra il punto F. Poste queste cose,dico che le base BC, & EF si combaciano. Poiche se ciò non è vero cadano le parti del mezzo della BC sopra, ouero sotto la EF, come per esempio nel

a *Ass. 9.*

b *Ass. 9.*

B sito

sito EKF. E noto che in tal caso le due rette linee EF, & EKF chiuderebbono la superficie
c *Ass.* 11. EKF, *c* il che affatto è impossibile. Nō può adunque la base BC cader sopra, ò sotto la base EF qualora i punti estremi B, & C, cadono precisamente sopra i punti E, & F. Laonde necessaria
d *Ass.* 9. cosa è, che le basi BC, & EF si adattino, e *d* perciò saranno tra di loro eguali. Similmente i triangoli ABC, & DEF si combaciono, poiche sono superficie piane, tutti gli estremi delle quali si adattano, onde è anche necessario, che le loro parti di mezzo ancor elleno si combacino, *e* al-
e *Deff.* 15. trimēti la retta linea non s'adatterebbe per ogni verso all'vna, e all'altra superficie piana, la qual cosa è inconueniente. Adunque i triangoli ABC, & DEF son'anch'essi eguali tra loro. *f* Finalmen-
f *Ass.* 9. te gli angoli B, & E, a i quali sono opposti i due lati eguali AC, e DF adattandosi fra di loro vengano ad essere eguali, e g per la stessa ragione so-
g *Ass.* 9. no anco eguali gli angoli C, & F, à i quali similmente sono opposti i due lati eguali AB, e DE. Per la qual cosa se in due triangoli &c. Le quali cose bisognaua dimostrare. Ora chiaminsi per breuità queste due figure Triangoli similmente eguali.

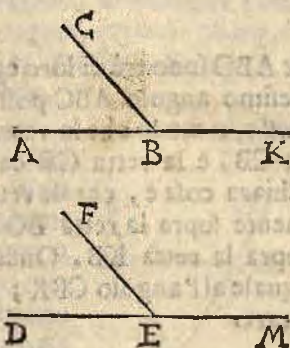


PRO-

PROPOSIZIONE V.

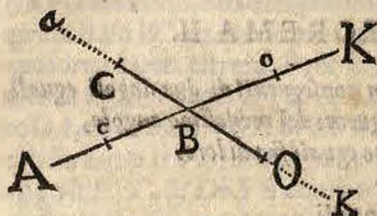
TEOREMA II.

Due angoli, che son conseguenti di due angoli eguali, ouero conseguenti del medesimo angolo, sono eguali fra di loro.



SIano i due angoli ABC, e DEF trá loro eguali; e prolungate in diritto le rette linee AB, & DE verso le parti degli angoli B, & E fino à i punti K, ed M. Dico che gli angoli CBK, & FEM, che sono conseguenti degli angoli sopradetti sono eguali trá di loro. Perche l' angolo DEF si suppone eguale all' angolo ABC. Adunque soprapposta intellettualmente la retta DE alla retta AB, & il punto E al punto B, *a* gli stessi angoli DEF, & ABC si adatteranno; e perciò la retta EF caderà precisamente sopra la retta BC: ma la retta EM cade sopra la retta BK, conciosia che le rette *b* DE, & AB allungate fino ad M, & K combaciandosi fra di loro non possono auere vna parte commune. Adũque gli angoli FEM, a *Ass.* 9. b *Ass.* 10

c *Ass.9.* & CBK si adateranno, e per *c* ciò saranno eguali. Nel secondo luogo si allunghino le rette linee AB, & CB d'un solo angolo ABC alla volta dell'angolo fino á i punti K, & O. Dico che ambedue gli angoli conseguēti CBK & ABO sono trà di loro eguali. S'intenda il medesimo angolo ABC posto à rouescio sopra se stesso, in modo che la retta AB cada sopra la retta CB, e la retta CB cada sopra la retta AB. Chiara cosa è, che la retta *d* BK cade precisamente sopra la retta BO, e la retta OB caderà sopra la retta KB. Onde l'angolo ABO sarà eguale all'angolo CBK; il che bisognaua dimostrare.



d *Ass.10.*

COROLLARIO.

Euclid. prop. 15. del 1. *Di quì si raccoglie, che due rette linee, che si seghino fanno gl' angoli alla cima eguali trà di loro.*

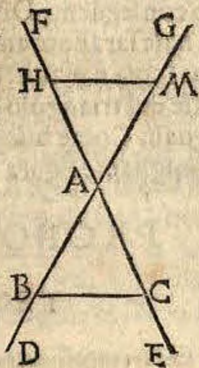
Impercioche segandosi le due rette linee AK, & CO scambieuolmente nel punto B, abbiamo dimostrato i due angoli alla cima ABO, & CBK, i quali erano conseguenti dell' angolo ABC essere eguali frà di loro. Nella stessa maniera

era i due angoli alla cima ABC, & KBO saranno eguali essendo eglino conseguenti del medesimo angolo ABO.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA III.

Gli angoli sopra la base d'vn triangolo, che abbia due lati eguali, sono tra loro eguali, & allungati i lati eguali in diritto saranno eguali, eziandio gli angoli sotto la base. Chiamisi poi tal figura Triangolo Isocele. Euclid. prop. 5. del 1.



Sia il triangolo ABC, i lati eguali del quale siano BA, & CA. Dico che gli angoli ABC, & ACB sopra la base sono eguali trà loro; e che allũgate in dritto le rette linee AB, & AC sotto la base fin'à D, & E, gli angoli DBC, & ECB sono eziandio eguali trà loro. *a* Si allunghino indefinitamente i lati BA, & CA verso le parti della cima A, cioè à dire fino à G, & F: e della retta AG, come della retta AF *b* si taglino le rette AM, & AH ciascheduna eguale alla stessa AB, ouero alla AC, e si congiunga la retta HM. E perche i due triango- a Dom. 2. b Prop. 3. c Corol. prop. 5.

d *Corol. prop.* 5. li BAC, HAM intorno a gli angoli *d* eguali BAC, HAM (per essere alla cima) anno i lati eguali ad vno ad vno tra di loro, mediante la costruzione. e *Prop.* 4. *e* Adunque l'angolo CBA è eguale all'angolo MHA (essendosi fatti eguali i loro opposti lati MA, & CA). f *Prop.* 4. Per la medesima ragione *f* l'angolo ACB sarà eguale al medesimo angolo MHA (essendosi similmente fatti eguali i lor lati opposti BA, & MA). Per la qual cosa i due angoli ABC, & ACB sono eguali ad vn terzo MHA: e g *Ass.* 1. *g* per ciò tra di loro. Sono dunque eguali gli angoli sopra la base del dato Triangolo. Il che primieramente bisognaua dimostrare.

h *Prop.* 5. In oltre perche i due angoli ABC, & ACB si sono dimostrati eguali, *h* adunque gli altri due loro conseguenti DBC, & ECB, i quali sono sotto la base saranno anch'essi eguali trà di loro. Per la qual cosa è manifesto, che i due angoli sotto la base del triangolo di due lati eguali sono trà loro eguali. Come bisognaua prouare. Si chiami ora somigliante figura triangolo Isocele.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA IV.

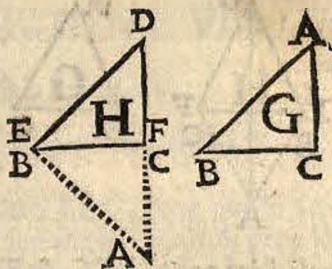
Euclid. prop. 8. *del lib.* 1.

Se due triangoli aueranno trè lati eguali à tre lati, ad vno ad vno saranno similmente eguali.

Siano i due triangoli G, & H, & il lato AB sia eguale al lato DE, AC a DF, e BC ad EF.

D.co

Dico che l'angolo A è eguale all' angolo D, l'angolo B all'angolo E, e l'angolo C all' angolo F. S'intenda il triangolo G con il suo lato BC collocato sopra il lato FE, di modo che il punto B cada precisamente *a* sul punto E, e mediante l'egualita de i detti due lati, il punto C cadera sul punto F. Et il triangolo ABC cada non sopra l'altro triangolo DEF, ma verso la parte a lui opposta. E' noto, che gli altri lati cõfinanti saranno eguali. Si *b* congiunga finalmente la retta AD, la quale passerá ò per il punto C, ouero segherà la base commune BC, ò cadera fuori di essa. Nel primo caso essendo i due lati AB, & BD nel triangolo DAB eguali, mediante la suppositione, *c* lo stesso triangolo sarà Isosce le, e perciò i due angoli A, & D sopra la base saranno eguali tra di loro; & in virtù della quarta proposizione i medesimi triangoli G, & H saranno similmente eguali.



a *Ass.9.*

b *Dem. 9*

c *Prop. 6,*

Ma nel secondo caso il triangolo ADB parimente sarà Isoscele; *d* onde i due angoli BAD, & BDA saranno eguali. E per la medesima ragio- d *Prop. 6.*

ne nel triangolo isoscele CDA due angoli CAD & CDA anch'essi saranno eguali. Adunque *e* se à primi angoli eguali si aggiugneranno altri secondi eguali, i due angoli BDC, & BAC si saranno fatti tra loro eguali.

e *Ass.3.*

Finalmente nel terzo caso da gli angoli eguali BDA, & BAD con il leuar via gli angoli eguali CDA, & CAD, si lasceráno i due angoli BDC, & BAC eguali tra di loro; onde *f* ancor gli altri angoli rimanenti saranno eguali. Per la qual cosa se due triangoli &c. Il che bisognaua &c.

f *Prop. 4.*

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

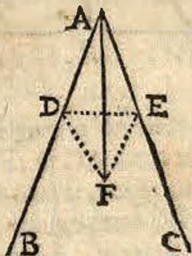
PROBLEMA IV.

Diuidere per il mezo vn dato angolo.

Euclid. prop. 9. del 1.

SIa l'angolo rettilineo BAC, deue questo angolo diuidersi in due angoli eguali. Si prenda nella retta AB qualsiuoglia punto D; & dalla AC allungata indefinitamente se ne tagli *b* AE eguale ad AD, e si cõgiunga la retta *c* DE, sopra la quale verso le parti opposte *d* si descriua il triãgolo equilatero DFE. Finalmente *e* dal punto A al punto F si tiri la retta linea AF. Dico che AF scioglie il Problema. Perche ne' due triãgoli DAF, & EAF, il lato AF è commune, & i lati DA, & AE sono eguali, mediante la costruzione, & le basi DF, & EF sono eguali ancor esse, essendo lati di vn triangolo equilatero. Adunque in virtù della passata proposizione gli angoli DAF, & EAF sono eguali tra di loro. Si che dalla retta AF viene ad esser diuiso per il mezo l'angolo BAC. Laonde conforme si era proposto abbiam diuiso per il mezzo vn'angolo dato. Il che &c.

a *Dom.* 2.
b *Prop.* 3.
c *Dom.* 1.
d *Prop.* 1.
e *Dom.* 1.

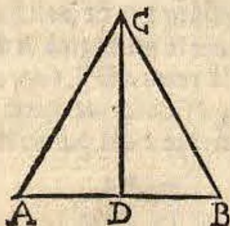


PRO-

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA V.

Euclid. o.del 1. *Tagliare per il mezo vna data retta linea terminat*



a *Prop.* 1.

b *Prop.* 8.

Sia la data retta linea terminata AB : deu queſta diuiderſi in due parti eguali. *a* Sopra eſſa ſi deſcriua il triangolo equilatero ACB, il cui angolo alla cima C *b* ſi ſeghi per il mezo dalla retta CD, che diuida la baſe AB nel punto D. Dico che il punto D è quello, che ſi cercaua. Perche ne' triangoli ACD, & BCD gli angoli alla cima ACD, e BCD ſono eguali per la coſtruzzione, il lato CD è commune, & i lati AC, & BC ſono eguali, eſſendo lati di vn triangolo equilatero. Adunque la baſe *c* AD è eguale alla baſe BD. Onde abbiamo tagliato per il mezzo la retta linea AB nel punto D. Il che &c.

c *Prop.* 4.



PRO

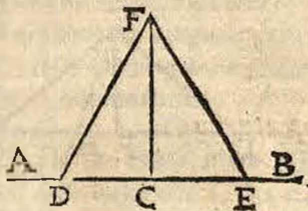
PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA VI.

Data vna retta linea, eleuare da vn dato punto di essa vna retta linea, che faccia gli angoli conseguenti eguali trà di loro. Si chiami l' vno, e l'altro de gli angoli eguali angolo Retto; e la retta linea eleuata si chiami perpendicolare à quella, sopr' alla quale essa è eleuata. Euclid. 11. del 1.

Sia la retta AB, & il punto in lei dato C, dal quale si deue eleuare vna linea retta, che faccia con la retta AB gli angoli conseguenti eguali tra loro. Si prenda qualsiuoglia punto D, & dall'altra parte si tagli dalla *a* CB allungata la linea CE eguale alla CD, *b* e sopra la DE si descriua il triangolo equilatero DFE. Finalmente dal punto C al punto F si tiri vna retta linea FC. Dico che la retta FC è quella, che si cercaua. Perche i due triangoli DCF, & ECF anno il lato CF commune, & i lati DC, & EC eguali per la costruzzione, e similmente le basi FD, & FE eguali per esser elleno lati di vn triangolo equilatero. Adūque *c* gli angoli FCD, & FCE sono eguali tra di loro, conforme di fare si era

a Prop. 3.
b Prop. 1.



c Prop. 7.

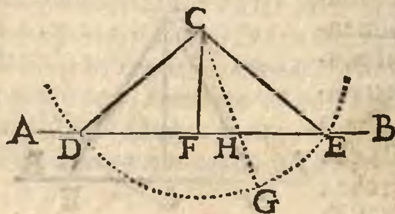
ſi era propoſto. Chiaminſi ora ambe due g[...] eguali angoli ACF, e BCF angoli Retti, e la F[...] ſi nomini Perpendicolare alla retta AB.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA VII.

Euclid. 12. del 1. *Sopra vna data retta linea non terminata tirare ad v[...] punto dato, che non ſia in eſſa vna retta perpendicolare.*

SIa AB la retta indefinita, & il punto C fuor[...] di eſſa. Si deue tirare dal punto C vna per[...] pendicolare ſopra l'AB. Si pigli nella retta AB[...]
a *Dom.*1. qualſiuoglia punto H, *a* e ſi congiunga la rett[...]
b *Dom.*2. CH, e s'allunghi *b* in dritto, tanto che paſſi oltr[...] la retta AB, come per eſempio fino al punto G[...]
c *Dom.*3. e fatto *c* cen[...] tro C con [...] interuallo C[...] G ſi deſcriu[...] il cerchio EG[...] D, la circon[...] ferenza de[...] quale neceſſa[...] riamente ſe[...]



gherà la retta AB, imperciochè il punto G del raggio CG fù collocato di là dalla retta AB. L[...]
d *Prop.* 9. tagli adunque nei punti D, & E; di poi *d* ſi tagli per mezzo la retta DE nel punto F, e ſi ſtendi[...]
no

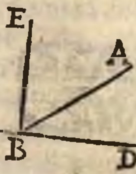
le rette linee CF, CD, & CE. Dico che la CF è la perpendicolare ricercata.

Perche ne' triangoli DFC, & EFC il lato CF è commune, & DF è eguale ad FE mediante la costruzione, e parimente le basi CD, e CE sono eguali, e essendo state tirate dal centro alla circonferenza del cerchio DGE. Adunque *f* gl'angoli DFC, & EFC sono eguali tra di loro, e perciò *g* son retti. Onde CF sarà perpendicolare alla AB. Adunque dal punto dato C abbiamo tirato vna perpendicolare alla retta linea AB. Il che &c. e *Ass.* 12. f *Prop.* 7. g *Prop.* 10.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA V.

Quando vna retta linea posta sopra vn'altra retta linea vi fà due angoli conseguenti, ò ella gli fà retti, ò eguali à due retti. Ma degli angoli diseguali quello che è maggiore del retto, si chiami ottuso, e quello, che è minore del retto si chiami acuto. Euclid. 13. lib. 1.



Stia la linea retta AB sopra la retta CD, e faccia gli angoli ABD, & ABC conseguenti. Si deue dimostrare, che ambedue, ò sono retti, ò che insieme presi sono eguali a due retti.

Poiche se la retta AB è perpendicolare alla retta

a *Prop.* 10 retta CD, *a* gli angoli conſeguenti ſaranno due
b *prop.* 10 retti, ſe nò l'vno ſara minore dell'altro. *b* Si ele-
ui dunque dal punto B la linea EB perpendicola-
re alla CB, i due angoli cõſeguenti EBC, & EBD
ſaranno retti. Perche l'angolo retto EBD
c *Aſſ.* 2. *c* eguale à due angoli DBA, & ABE inſieme pre-
ſi. Adunque aggiunto communemente l'angolo
d *Aſſ.* 2. retto EBC, *d* i due angoli retti DBE, & EBC in-
ſieme preſi, ſaranno eguali à i tre angoli DBA,
e *Aſſ.* 8. ABE, & EBC inſieme preſi. In oltre perche l'an-
golo CBA *e* è eguale à i due angoli CBE, & EBA
inſieme preſi. Adunque aggiuntoui commune-
f *Aſſ.* 2. mente l'angolo ABD *f* la ſomma de i due angoli
CBA, & ABD ſara eguale alla ſomma de i trè an-
goli DBA, & ABE, & EBC; ma alla medeſima
ſomma de i detti trè angoli fù dimoſtrata eguale
g *Aſſ.* 1. la ſomma de i due retti CBE, & EBD *g* e ſono
eguali tra di loro quelle coſe, che ſono eguali ad
vna terza. Adunque la ſomma de i due angoli
CBA, & ABD ſarà eguale alla ſomma de i due
angoli retti. Per la qual coſa, quando vna retta
linea &c. Il che ſi &c.



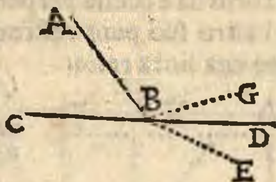
PRO-

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA VI.

Se la ſomma di due angoli conſeguenti fatti dal concorſo di tre rette linee in vn punto ſarà eguale à due angoli retti: le due eſtreme rette linee ſaranno coſtituite in dritto. *Euclid. 14. lib. 1.*

LE tre rette linee A*B*, CB, e D*B* concorrono nel punto *B*, e la ſomma de i due angoli conſeguenti A*B*C, & A*B*D ſia eguale a due retti. Dico che le C*B*, & *B*D ſono poſte in dritto, cioè cõpongano vna ſola linea retta. Impercioche ſe CBD non è vna ſola retta linea, ſi diſtenda in dritto la *a* C*B* verſo la parte *B*, la quale cadera, ò dalla parte di ſopra, ò di ſotto della *B*D. Cada prima dalla parte di ſopra ſe può caderui, e ſia eſempi grazia CBG, è manifeſto per la paſſata propoſizione, che la ſomma de i due angoli C*B*A, & ABG ſarà eguale à due retti; mà per la noſtra ſuppoſitione la ſomma de i due angoli C*B*A, & ABD è ancor eſſa eguale à due retti. Adunque l'aggregato di due angoli C*B*A, & A*B*G è eguale alla ſomma de due angoli C*B*A, & A*B*D, e toltone via l'angolo commune CBA, *b* l'angolo ABD



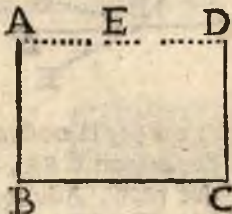
a *Dom.* 2

b *Aſſ.* 5.

ABD resterà eguale all'angolo ABG, il tutto alle
c Ass.7. parte, c che è impossibile. Adunque la retta CB allungata non cade dalla parte superiore della retta BD. Ne anche può cadere dalla parte inferiore della medesima, come verbigrazia in CBE. Imperciòche nel medesimo modo si mostrerebbe, che gli angoli ABD, & ABE sarebbeno tra loro eguali, la parte al tutto, il che di nuouo è impossibile. Si che la CB distesa in dritto passerà precisamente per la BD, e perciò la CBD sarà vna sola retta linea. Il che conueniua dimostrare.

ASSIOMA XIV.

Se vna retta linea trasferita lateralmēte nello stesso piano sopra d'vn'altra retta linea la tocchi sempre mai coll'estremo suo punto, & in tutto il suo corso sia à quella perpendicolarmente eleuata: l'altro suo punto estremo descriuerà col suo moto vna linea retta.



Perche se la retta linea AB col suo punto estremo B toccando sempre mai la retta BC, sarà trasportata lateralmente nel medesimo piano, eleuata in tutto il suo corso perpendicolarmente sopra la retta BC, non hà dubbio che l'altro suo punto estremo A col suo moto descriuerà

vna

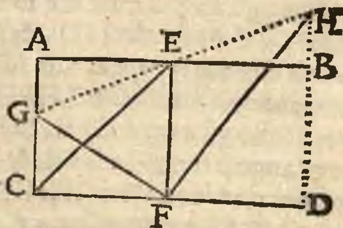
vna retta linea, quale è AED: poiche tutti i punti di tal linea AED sono remoti dalla retta BC con interstizij eguali misurati dalla retta AB, e però sono tali punti disposti con il medesimo ordine equabile, conforme si conseguitano i punti della retta BC, i quali sono ordinati in quella guisa, che richiede il flusso breuissimo, che costituisce vna retta linea.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA VII.

Se à due rette linee poste nel medesimo piano, vna medesima retta linea sarà perpendicolare: qualsiuoglia altra retta linea tirata dall' vna perpendicolarmente sopra dell'altra sarà eguale à quella terza, e similmente posta, e perpendicolare alla rimanente.

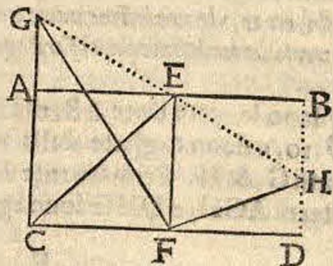
Sia la retta linea EF perpendicolare ad ambedue le rette AB, & CD poste nel medesimo piano, e da qualsiuoglia pũto A della retta linea AB, cada sopra la retta CD la perpendicolare AC, incontrandola in C. Dico primamente, che la AC è vna retta linea



eguale ad EF, e similmente posta. Imperò che se ciò nō è vero, dalla medesima parte della retta CD, alla quale riguarda la retta EF, *a* sia distesa
a Prop.3. la retta CG fatta eguale alla FE. Non caderà il punto G in A, per essersi conceduta AC, non eguale ad EF, ò pure alla CG, ò non similmente posta. *b* Facciasi poi la FD eguale à CF, ed in-
b *La stessa.* tendasi la GC trasportata lateralmente fino al punto D, radendo col suo punto estremo C tutta la lunghezza della retta CD, sopra la quale per tutto il suo corso si mantenga perpendicolarmē-te eleuata, e nel medesimo piano: *c* Necessaria-
c *Ass.14.* mēte il punto G nel suo moto descriuerà la retta linea GEA, la quale passerà per il pūto E; poiche
d *Ass.9.* la GC arriuādo alla EF, *d* vi si adatterà essendole eguale. E di più la retta GE segherà la retta linea AE per essere il punto G in altro sito che A; e perciò l'angolo GEF non sarà eguale all'angolo AEF. Finalmente congiunganfi le rette linee GF, & HF. Perche i due triangoli GCF, & HDF intorno à gli angoli retti C e D anno il lato GC
e *Prop.4.* eguale, e l'istesso che HD, & il CF eguale alla DF. *e* Adunque le base GF, & HF sono eguali, e parimente gli angoli GFC, HFD sono eguali tra
f *Ass.3.* loro, e sono gli angoli CFE, DFE retti. *f* Adunque gl'angoli rimanēti GFE, & HFE sono egua-
g *Prop. 4.* li, e intorno à loro i lati GF, HF si sono dimostra-
h *Prop. 10.* ti eguali, & EF è commune. *g* Adunque gl'angoli GEF, & HEF sono eguali tra loro, e *h* perciò retti. Ma anche l'angolo AEF per la ipotesi era retto. Adunque gli angoli GEF, & AEF sono egua-
li

li tra loro, mà furono dimostrati ineguali, il che è impossibile. Adunque è impossibile, che la AC non sia vna retta linea eguale ad EF, distesa dalla medesima parte, alla quale riguarda la stessa EF; e però ella sara tale come fù proposto.

Secondariamente dico, che l'angolo CAE è retto. Perche la retta CF è perpendicolare alle due rette AC, & EF, e l'altra retta AE è perpẽdicolare alla EF vna di quelle stesse. Adunque, come nel primo



caso fù mostrato, la retta AE sarà eguale alla CF, che è perpendicolare, sì all'vna, come all'altra. Si distenda di poi la retta EC. Perche ne triangoli AEC, & FCE il lato AC è eguale all'FE, & AE è eguale alla FC, e la base CE è commune. *i* Adunque l'angolo retto EFC è eguale l'angolo CAE. Laonde l'angolo CAE sara retto come era stato proposto. Si chiamino ora le rette linee CD, & AB Parallele, ò equidistanti, e la EF perpendicolare all'vna, e all'altra, si chiami distanza delle parallele.

i Prop. 7.

PROPOSIZIONE XV.

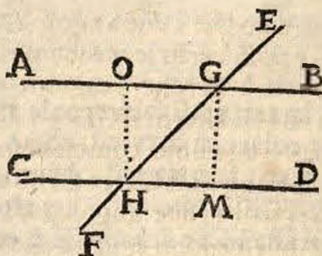
TEOREMA VIII.

Euclid. 29.del li. 1.

Vna retta linea che seghi due parallele, farà gli angoli alterni eguali, e l'esteriore eguale all'interiore opposto, e verso le medesime parti, e gl' interiori volti verso le medesime parti farà eguali à due retti.

SIano le rette linee AB, e CD parallele tra loro, e siano tagliate dalla retta linea EF ne punti G, & H. Primamente dico, che gli angoli alterni AGH, e DHG sono eguali tra loro. *a* Si tiri dal punto G la retta GM perpendicolare alla retta CD, che la seghi in M, e dal punto H si tiri la HO perpendicolare all'AB, che la tagli nel punto

a Prop. 11



O. E perche le due rette AB, e CD sono parallele, e la GM è perpẽdicolare ad vna di quelle, cioè alla CD; *b* farà eziandio la medesima GM perpendicolare all'altra AB; & è la HO perpendicolare alla AB; Adunque come nella precedente proposizione fù mostrato, farà l'interposta OH eguale alla GM, e parimente l'interposta

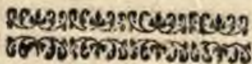
b Prop. 14

GO

GO farà eguale alla MH. Onde ne' triangoli OHG, MGH; i due lati GO, & HO sono eguali à due lati HM, & GM ad vno ad vno, e la base GH è commune. *c* Adunque gli angoli alterni DHG, & AGH sono eguali tra loro, e parimente i *d* loro compimenti a due retti, cioè gl'angoli BGH, e EHG saranno eguali tra loro. c *Prop.* 7. d *Prop.* 5.

Secondariamente dico, che l'angolo esteriore EGB è eguale all'angolo GHD interiore opposto, e collocato verso le medesime parti. Perche *e* in virtù delle parallele AB, e CD, gl' angoli alterni DHG, & AGH sono eguali tra loro, *f* e l'angolo EGB è eguale al medesimo angolo AGH alla cima. *g* Adũque l'angolo EGB è eguale all'angolo GHD. e *Parte* I. *di questa.* f *Corol. pro.* 5. g *Ass.* I.

Nel terzo luogo dico che i due angoli AGH, e CHG interiori, e posti verso le medesime parti sono eguali a due retti. Perche à cagione delle parallele, i *h* due angoli alterni AGH, e DHG sono tra loro eguali, *i* aggiunto communemente l'angolo CHG, i due angoli AGH, e CHG insieme presi saranno eguali a i due angoli DHG, e CHG, mà questi *l* insieme sono eguali à due retti. Adunque i due angoli AGH, e CHG sono eguali à due retti. Tutte le quali cose bisognaua dimostrare. h *Part.* I. *di questa.* i *Ass.* 2. l *Prop.* 12



PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA IX.

Eucl. 27. e 28. del 1.

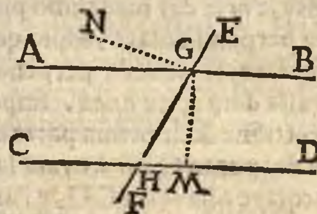
Se cadendo vna retta linea sopra due rette farà gl'angoli alterni eguali fra loro, ouero l'angolo esteriore eguale all'interiore oposto, e volto verso le medesime parti, ò farà i due angoli interiori dalle medesime parti eguali à due retti: quelle due rette linee saranno parallele tra loro.

SE la retta linea EF segando le due rette linee AB, e CD fara primamente gl'angoli alterni AGH, e DHG eguali tra loro. Dico le rette linee AB, e CD esser parallele. Imperciò che se ciò non è vero, dal punto G si *a* tiri la retta linea GM perpendicolare alla CD, segandola in M, e dal punto G *b* si elcui la retta GN perpendicolare alla stessa GM. E perche la medesima retta linea GM è perpendicolare alle due rette linee CD, & NG, *c* le linee rette CD, & NG saranno parallele fra loro: ma la AB fu r putata non parallela alla stessa CD, adunque la NG cade sopra, ò sotto della retta AG. Poi perche le parallele NG, e CD son segate dalla retta linea EF ne' pūti G, & H, *d* i due angoli alterni NGH, e DHG saranno eguali tra loro, ma l'angolo AGH si suppose eguale al medesimo angolo DHG. *e* Adunque gli angoli NGH, & AGH sono eguali tra loro la parte al tutto, *f* il che è impossibile.

a *prop.* 11
b *prop.* 10
c *prop.* 14
d *prop.* 15
e *Ass.* 1.
f *Ass.* 7.

bile. Adunque nessuna altra retta linea, fuor che la stessa AB può esser parallela alla CD.

Sia nel secondo luogo l'angolo esteriore EGA eguale all'angolo GHC interiore, e volto alle medesime parti, dico che le rette AB, e CD sono parimente parallele; perche l'angolo CHG si suppone eguale all'angolo AGE, & è l'angolo BGH eguale al medesimo angolo AGE alla cima. *h* Adunque i due angoli CHG, e BGH alterni, saranno eguali tra loro, e per la prima parte di questa propositione le rette linee AB, e CD saranno parallele.



g *Corol. prop. 5.*

h *Ass. 1.*

Siano nel terzo luogo gli angoli interiori alle medesime parti AGH, e CHG eguali à due retti. Dico similmente le rette AB, e CD esser parallele, perche i due angoli AGH, e CHG si suppongono eguali à due retti, *i* e sono eziandio eguali à due retti i due angoli DHG, e CHG cōseguenti. Adunque la somma de i due angoli AGH, e CHG è eguale alla sōma de i due angoli DHG, e CHG, e *k* toltone via communemente l'angolo CHG, i due angoli AGH, e DHG alterni saranno eguali trà loro, e per ciò, per la prima parte, le rette AB, e CD saranno parallele. Le quali cose bisognaua dimostrare.

i *Prop. 12*

k *Ass. 3.*

COROLLARIO.

Euclid. prop.31.

Cauasi il modo, come da vn punto dato si possa tirare vna retta linea, che ad vn'altra data sia parallela. Atteso che se dal dato punto *l* si tira vna perpendicolare alla data retta linea, e *m* se dal medesimo punto si solleua vn'altra perpendicolare, sopra quella prima perpendicolare, la seconda perpendicolare sarà parallela alla data retta linea. Imperciò che nell a costruttione della prima parte di questa propositione dal punto G; si è tirata la retta GM perpendicolare alla retta CD, e l'altra GN perpendicolare alla stessa MG, si è dimostrata parallela alla stessa CD.

l Prop.12.

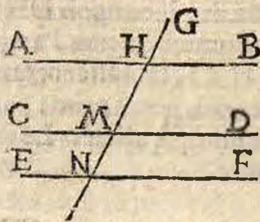
m Prop. 10.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA X.

Euclid. 30. del 1.

Quelle rette che son parallele alla medesima retta linea, sono anche parallele trà loro.



SI' la CD, come la EF siano parallele alla medesima AB. Dico che le CD & EF sono eziandio parallele tra loro. Vengan tutte tagliate dalla retta GN ne' pun-

punti H, M, N. Perche la CD, e la AB si suppongono parallele. *a* Adunque gli angoli alterni AHM, & DMH sono eguali trà loro. In oltre perche la EF, e la AB sono parallele. *b* Adunque gli angoli alterni AHN, & FNH, sono trà loro eguali. *c* E però i due angoli HMD, & MNF sono eguali tra loro, essendo eguali all'angolo medesimo AHM. Ma essendosi dimostrato nelle due rette CD, & EF l'angolo esteriore HMD eguale all'interiore, & opposto verso le medesime parti MNF. *d* Adunque le due rette linee CD, & EF saranno eziandio parallele trà loro. Per le quali cose &c.

a *Prop.* 15
b *prop.* 15
c *Ass.* 1.
d *prop.* 16

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XI.

Prodotto vn lato di qualsiuoglia triangolo, l'angolo esteriore è eguale à due interiori, & opposti. E i tre suoi angoli interiori sono eguali à due retti.

Euclid. 32. del 1.

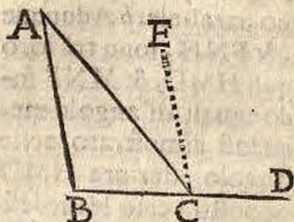
DI qualsiuoglia triangolo ABC, il di cui lato BC sia prodotto verso C fin à D. Primamente dico, che l'angolo DCA esteriore è eguale alla somma de i due interiori, & opposti A, e B. Dal pũto C *a* si tiri la CE parallela alla AB. Perche la AC sega ambedue le parallele AB, e CE. *b* Adunque l'angolo ECA è eguale all'angolo alterno A; nella medesima guisa la BD segando le due parallele AB, & EC, *c* farà l'angolo esteriore

a *Corol. prop.* 16.
b *prop.* 15
c *prop.* 15

re

re DCE eguale all'angolo B interiore, opposto e verso le medesime parti. Laonde i due angoli DCE, & ECA insieme presi, *d* cioè l'angolo esteriore DCA sarà eguale alla somma de i due angoli B, & A.

d *Ass.8.*



Secondariamente dico, che la somma de i tre angoli interiori A, B, & ACB del medesimo triangolo, sono eguali à due retti. Perche l'angolo DCA esteriore, si è dimostrato eguale alla somma de i due interiori, & opposti A, e B. Adunque *e* agiuntoui communemente l'angolo ACB, la somma dei due angoli DCA, & ACB, sarà eguale alla somma de i tre angoli A, B, & ACB. *f* Ma i due angoli DCA, & ACB sono eguali à due retti. *g* Adunque la somma de i tre angoli A, B, & ACB sono eguali à due retti. Il che bisognaua &c.

e *Ass.2.*
f *Prop.12*
g *Ass.1.*

COROLARIO.

Euclid. prop.16. 17. del lib.1.

Quindi si caua l'angolo esteriore esser maggiore di qual si voglia interiore, & opposto, & i due angoli interiori di qual si voglia triangolo esser minore di due retti. Poiche si è dimostrato l'angolo esteriore eguale à due interiori, & opposti insieme presi: e tutti tre insieme far la somma di due retti,

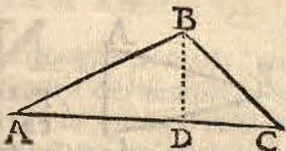
PRO-

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XII.

Il lato maggiore di qual si sia triangolo suttende l'angolo maggiore. *Euclid. 18. del 1.*

NEl triangolo ABC, sia il lato AC maggiore del lato AB. Dico che l'angolo B è maggiore dell'angolo C. Dal lato



maggiore AC, *a* si seghi AD eguale al minore AB, e si cógiunga la retta BD; il triangolo BAD sarà isoscele, e perciò *b* gli angoli sopra la base ABD, & ADB saranno eguali tra loro; è l'angolo ABC maggiore dell' angolo ABD, cioè il tutto maggiore della sua parte. Adunque l'angolo ABC sara ancora maggiore dell' angolo ADB, *c* ma l'angolo ADB nel triangolo BDG è esteriore, e perciò maggiore dell' angolo C interiore, & opposto. Onde molto più l'angolo ABC sarà maggiore dell'angolo C. Si che il lato maggiore AC suttende l'angolo maggiore ABC; il che dimostrar si douea.

a *Prop. 3.*
b *Prop. 6.*
c *Corol. prop. 18.*

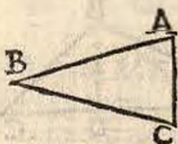
PRO-

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XIII.

Euclid.6. & 19.del 1.

Gli angoli eguali d'vn medesimo triangolo sono sott[...] da lati eguali. Et all' angolo maggiore si sottende il maggior lato.



NEl triangolo ABC si[...] prima l'angolo A e[...] guale all'angolo C. Dic[...] che il lato CB è eguale al la[...] to AB. Poiche se ciò nõ è ve[...] ro, sia BC maggiore, ò mi[...] nore di AB. Adũque per la passata l'angolo A sa[...] rà maggiore, ò minore di C, il che è cõtro il sup[...] posto. E perciò CB non è maggiore, ò minore di[...] AB. Laonde è necessaria, che gli sia eguale, il che[...] facea mestieri dimostrare nel primo luogo.

Sia nel secondo luogo l'angolo A maggiore di[...] B. Dico il lato BC esser maggiore del lato AC[...] Poiche se questo non è vero, sara BC ò eguale, ò[...] minore di AC. Sia eguale se è possibile. *a* Adun[...] que gli angoli B, & A saranno eguali tra loro; ma[...] l'angolo A fù posto maggiore di B. Adunque sa[...] ranno eguali, e diseguali: che è impossibile. E[...] perciò BC non è eguale alli AC.

a Prop. 6 lib. 1.

Sia poi minore, se anche questo può essere[...] Adũque per la passata al minor lato BC, si oppo[...] ne l'angolo minore A: il che di nuouo è contra il[...]

sup-

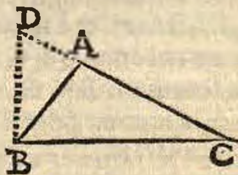
supposto, auuenga che l'angolo A si supponeua maggiore di B. Adunque il lato BC non è minore del lato AC. Mà ne anche esser eguale fù dimostrato. Adunque BC sarà maggiore di AC. Onde &c.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XIV.

La somma di i due lati di qualsiuoglia triangolo è maggiore del terzo, e la differenza de i medesimi è minore del lato rimanente, e la somma di tutti tre i lati è maggiore del doppio d'vno, ma minore del doppio di due di essi. Eucl. 2 del 1.

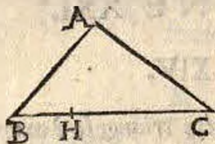
SIa qualsiuoglia triangolo ABC. Dico nel primo luogo, che la somma di qualsiuogliono due lati, come BA, & AC è maggiore del terzo lato BC. Allungato il lato CA verso A, *a* si segni DA eguale alla BA, e si congiunga la retta BD; perche nel triangolo BAD, i suoi due lati BA, e DA sono eguali trà loro. Adūque *b* gli angoli alla base D, & ABD sono trà loro eguali, & è l'angolo CBD maggiore dell'angolo partiale ABD. a Prop. 3. b Prop. 16



Adunque l'angolo CBD è maggiore dell'angolo D: e *c* perciò nel triangolo CBD, il lato CD, che c prop. 20

sot-

fottende l'angolo maggiore, farà maggiore di lato BC: ma DC è eguale alla fomma delle due rette linee BA, & AC (aggiungendofi all'eguali BA, e DA communemente AC). Adunque la fomma de i due lati BA, & AC è maggiore di terzo lato BC.



d *Prop.* 3. Nel fecondo luogo fi leghi dal maggior lato BC la CH eguale all'AC, verrà ad effere BH la differenza de i due lati BC, e CA. Dico che la BH è minore della BA. Perche la fomma de i due lati BA, & CA è maggiore di BC; fe fi fottrarranno da loro l'eguali HC, e CA, *e* la BA auanzo della maggior fomma farà maggiore di BH.

e *Aff.* 4.

Dico nel terzo luogo, che la fomma de i tre lati BA, AC, e CB è maggiore del doppio di BC. Perche i due lati BA, & AC fono maggiori del lato BC, *f* aggiuntaui communemente la BC. La fomma de i tre lati BA, AC, e CB farà maggiore del lato BC prefo due volte.

f *Aff.* 4.

Nell'vltimo luogo, dico che la fomma de i tre lati BC, BA, e CA è minore del doppio della BA infieme col doppio di CA. Perche BC è minore della fomma di BA, & AC, aggiunta communemente la fomma delle BA, & AC farà la fomma de *g* i tre lati BC, BA, e CA minore della fomma BA, & AC prefa due volte. Le quali cofe doueano tutte dimoftrarfi.

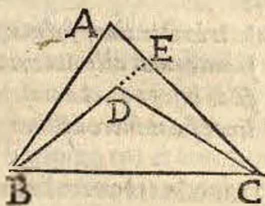
g *Aff.* 4.

PRO-

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XV.

Se dall'estremità d'vn lato d'vn triangolo concorreranno dentro di esso due rette linee; la loro somma sarà minore della somma de gl'altri due lati del triangolo, mà conterranno vn'angolo maggiore. *Eucl. 21. del 1.*



SIa il triangolo ABC, e da' punti B, E concorrano dẽtro il triangolo le due rette linee BD, e CD in D; Dico la somma delle BD, e CD essere minore della somma delle BA, e CA, ma l'angolo BDC esser maggiore dell'angolo BAC. La BD allungata seghi la AC in E, nel triangolo BAE *a* sarà la sõma delle BA, & AE maggiore di BE, & aggiunta communemẽte EC *b* sarà la somma delle BA, & AEC maggiore della somma delle due BE, & EC. In oltre *c* nel triangolo CED la somma delle EC, & ED è maggiore di CD, & aggiunta cõmunemente DB *d* la somma delle CE, & EDB sarà maggiore della somma delle due CD, e DB. Onde la somma delle AB, & AC sarà molto maggiorè della somma delle DB, e DC. a *prop. 19.* b *Ass. 4.* c *prop. 21* d *Ass. 4.*

Di poi *e* nel triangolo EDC, l'angolo esteriore e *Corol. pr. 18.*

re BDC è maggiore dell'interiore, & opposto CED. Mà questo nel triangolo EAB è esteriore, f e perciò maggiore dell'angolo interiore, & opposto A. Si che l'angolo BDC sarà molto maggiore dell'angolo A. Il che haueuasi à dimostrare.

f Corol. prop. 18.

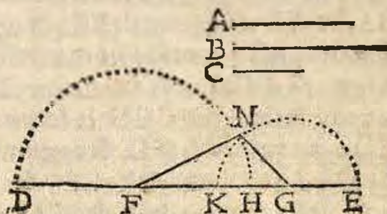
PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA VIII.

Eucl. 22. del 1.

Date trè rette linee formare vn triangolo, i di cui lati siano eguali alle date rette linee ad vna ad vna. Mà fà di bisogno, che ciascheduna di queste date rette linee sia minore dell' aggregato delle rimanenti.

SIano le trè rette linee A, B, e C, qualunque delle quali sia minore della somma della rimanente. Si deue formare vn triangolo, che habbia trè lati, ciascun de' quali sia eguale a ciasche-



duna delle date rette linee. Si tiri qualsiuoglia retta linea DE prodotta indefinitamente, & in

lei

ei si seghi *a* la DF eguale ad A, e dalla parte, che rimane si seghi FG eguale alla B, e finalmente si seghi GE eguale alla C. Di poi fatto centro G coll'interuallo GE, si descriua il cerchio ENK, e centro F coll'interuallo FD, si descriua il cerchio DNH; e perche le rette DF, FG, e GE sono eguali alle rette A, B, e C ad vna ad vna, e di queste le due A, e C insieme prese sono maggiori di B, per il dato, & è FH eguale ad A (p'esser ambedue eguali alla stessa DF, la A, per la costruttione, e FH per esser anch'egli raggio dell'istesso cerchio). Similmente è GK eguale a C, per essere ciascheduna di loro eguale alla stessa GE, e la FG eguale à B. Adunque le due FH, e GK sono maggiori della FG. Stante questo, dico che i cerchi DNH, & ENK si segano tra di loro, perche in altra maniera si toccarebbono, o caderebbe l'vno fuori dell'altro: Laonde la somma dei due loro raggi FH, e GK posti in diritto sarebbe minore, ò eguale alla retta FG, la quale congiunge i centri de' cerchi, il che è falso, essendosi dimostrata la somma delle due FH, e GK maggiore della sola FG, è dunque necessario, che tali cerchi si seghino, sia il concorso delle loro circonferenze in N, e si tirino le rette FN, e GN. E *f* perche FN è eguale alla DF, essendo tirate dal centro alla circonferenza del cerchio DNH, & alla retta A si fece eguale la medesima DF. *g* Adũque la FN è eguale ad A. Similmente GN, e GE sono raggi del medesimo cerchio, e *h* perciò eguali, & è la retta C eguale alla medesima GE. Adunque

a *Prop.* 3.
f *Ass.* 12.
g *Ass.* 1.
h *Ass.* 12.

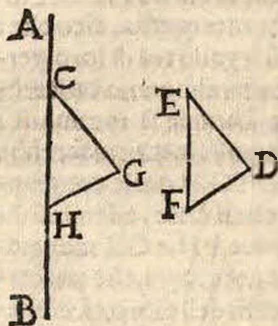
que NG è eguale alla C; e si è fatta la retta FG eguale alla B. Adunque i tre lati del triangolo FNG sono eguali alle tre date rette linee A, B, e C. Il che si propose.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA IX.

Euclid. 23. del 1.

Nella data retta linea, e nel punto dato in essa, costituisce vn'angolo eguale à vn'altro angolo dato.



SIa la data retta linea AB, si deue nel suo punto C costituire vn'angolo eguale a vn'altr'angolo dato E. Si tiri douunque si voglia la retta DF, purche faccia il triangolo DEF; di poi si faccia *a* il triangolo CGH, i lati del quale siano eguali à i trè lati del triangolo DEF ad vno ad vno; di modo che al punto C conuengano i due lati CG eguale à DE, e CH eguale a EF. (Non hà dubbio ciò essere possibile, per esser due lati, quali si vogliano del triangolo EDF maggiori del rimanente.) Ora in questi due triangoli tutti i lati

a prop. 23.

del-

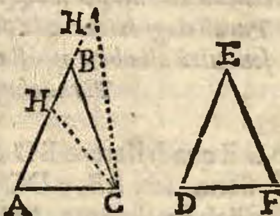
dell'vno sono eguali à tutti i lati dell'altro ad vno ad vno. Adunque *b* l'angolo C è eguale all'angolo E, i quali sono opposti à i lati GH, e DF eguali; e ciò bisognaua fare. b *prop. 7.*

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA XVI.

Se in due triangoli i due angoli dell'vno saranno eguali à i due angoli dell'altro ad vno ad vno, & vn lato eguale à vn lato, i quali siano adiacenti à gli angoli eguali, ouero siano sottesi ad angoli eguali; saranno i triangoli similmente eguali. *Eucl. 26. del 1.*

NE' triangoli ABC, e DEF sieno i lati AC, e DF eguali trà loro, e siano gl'angoli BAC, D eguali, e siano similmente eguali tra loro gli angoli ACB, & F. *a* Manifesta cosa è, che il terzo angolo d'vn triangolo è eguale all'angolo rimanente dell'altro triangolo (per essere i tre angoli di ciascheduno di detti triangoli eguali à due retti. Dico che i lati AB, e DE sono eguali, e che parimente sono eguali tra loro i lati CB, & FE. Imperò che, se ciò non è vero, sia AB maggiore, ò minore di DE, e *b* si seghi la AH eguale à DE, e si congiunga la retta CH. E perche a *Dalla prop 18.* b *Prop. 3.*



che intorno a gli angoli eguali A, e D, i lati CA, & FD sono eguali, si come sono eguali i lati HA, c Prop.4. & ED. Adunque ne' triangoli c, ACH, & DFE, gli angoli ACH, & F saranno eguali tra loro. Ma l'angolo ACB era eguale al medesimo angolo F. Adunque d due angoli ACH, & ACB sono eguali tra loro. La parte, ed il tutto che è e impossibile. Laonde la retta linea BA non è maggiore, ne minore della ED, ma sarà eguale, per la medesima ragione i lati CB, & EF saranno eguali: il che bisognaua dimostrare.

d *Ass.*1. e *Ass.*7.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XVII.

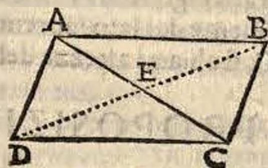
Eucl. 34. del 1.

Il quadrilatero, i di cui lati opposti son paralleli, hà gli angoli, & i lati opposti eguali trà loro, & il diametro lo sega per mezzo, mà i diametri si segono vicendeuolmente per mezzo. Si chiami tale figura Parallelagrammo: e la perpendicolare tirata dalla sommità alla base opposta, si chiami altezza del Parallelagrammo.

Sia il quadrilatero BD, il cui diametro AC, e siano i lati AB, e DC paralleli tra loro, siano paralleli similmente AD, BC. Dico nel primo luogo i lati AB, e DC essere eguali tra loro, come anche AD, e BC. Nel secondo luogo gli angoli B, e D, come anche gli angoli BAD, BCD essere trà loro eguali. Terzo, i triãgoli ABC, & ADC

segati

segati dal diametro essere eguali. Quarto, i diametri AC, e BD segarsi scambieuolmente per mezzo in E. Perche nel quadrilatero AC, i lati oppositi AB, e DE sono paralleli, e son segati dall' AC. Adunque *a* gli angoli alterni BAC, e DCA sono eguali tra loro. Similmente perche le rette *b* AD, BC sono parallele, e son segate dalla retta AC. Adunque gli angoli alterni BCA, e DAC sono tra loro eguali. Onde nel triangolo BAC, i due angoli sopra la base AC sono eguali ad vno ad vno à i due angoli del triangolo DAC adiacenti sopra la medesima base; e *c* perciò i triangoli BAC, e DAC saranno similmente eguali: sì che l'istesso quadrilatero BD sarà segato per mezzo dal diametro AC. Di più i lati AB, e DC, i quali sottengono gl'angoli alterni eguali trà loro, come anche i lati oppositi AD, e BC saranno eguali. In oltre saranno eguali gli angoli oppositi B, e D, perche sono sottesi dalla medesima base AC; di vantaggio, perche à gli angoli eguali DAC, e BCA s'aggiungono gli eguali angoli BAC, e DCA. Adunque *d* anche gli angoli oppositi DAB, e BCD saranno eguali trà loro. Finalmente perche ne' triangoli ABE, e CDE, i due angoli BAE, e DCE sono dimostrati eguali, e gli angoli AEB, e CED alla cima *e* sono eguali, & i due lati AB, e CD,



a *prop.15*

b *prop.15*

c *prop.25*

d *Ass.2.*

e *Corol. prop.5.*

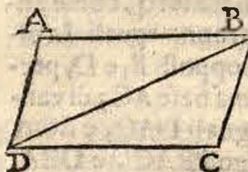
che sottendono angoli eguali, si sono dimostrat
f Prop. 25 eguali. Adunque f la AE è eguale ad EC, come
è ancora eguale BE ad ED. Onde è manifesto
quãto si propose. Chiamisi hora lo spatio ADCB
Parallelogrammo, e la retta tirata perpendico-
larmente dal lato supremo AB alla base opposta
DC, si chiami altezza del Parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XVIII.

Euclid. 33. del 1.

Se in vn quadrilatero gli angoli opposti trà loro, ouero gl' opposti lati saranno eguali, ò saranno i due lati opposti solamente paralleli, ed eguali, ò pure i due lati opposti paralleli, e due angoli opposti eguali, ò i due lati opposti paralleli, e i due triangoli fatti dal diametro eguali, ouero i due diametri si segheranno per mezzo: sarà sempre Parallelagrammo.

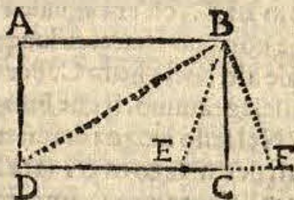


Siano primamente nel quadrilatero AC gli angoli ABC, e CDA eguali trà loro, come anche siano eguali gli angoli A, e C. Dico lo spatio AC essere Parallelagrammo. Perche se ad A, & à C eguali si aggiungono gli angoli eguali ADC ad A, & ABC a C; a gli angoli A
a Ass. 2.
& ADC insieme saranno eguali à due C, e CBA
b Dalla prop. 18.
ma b i quattro angoli di qualsiuoglia quadrilate-

ro sono eguali à quattro retti, per essere eguali à tutti gli angoli di due triangoli, ne' quali il quadrilatero si può diuidere; Adunque i due angoli A, & ADC insieme sono eguali a due retti, e sono interiori verso le medesime parti. Adunque le *c* AB, e DC son parallele. Nel medesimo modo AD, e BC saranno Parallele; e perciò lo spatio AC sara Parallelagrammo. c *Prop.*16

Sieno secondariamente i due lati opposti AB, e DC eguali tra loro, e parimente DA, e BC sieno eguali. Dico lo spatio essere Parallelagrammo. Tirato il diametro BD ne i triangoli ABD, e CBD saranno due lati dell'vno eguali à due lati dell'altro ad vno ad vno, e DB lato commune; Adunque *d* saranno similmente eguali, e perciò gli angoli opposti A, e C saranno eguali, & ADB, CBD saranno tra loro, come anche saranno eguali tra loro gli angoli ABD, e CDB. Onde *e* i due angoli ADB, e CDB insieme saranno eguali a i CBD, & ABD insieme presi: Adunque per la prima parte di questa proposizione lo stesso spatio AC sara Parallelagrammo. d *Prop.*7 e *Ass.*2.

Nel terzo luogo solamente i lati opposti AB, e CD siano paralleli, & eguali: ne seguirà il medesimo. Imperciòche, se ciò non è vero, tirata *f* la BE parallela alla AD, si faccia il paralle- f *Corol. prop.*16.



lagrammo ADEB. Non à dubbio, che la retta BE caderà ò di qua, ò di là dal punto C. g Adunque il lato DE sarà eguale al lato opposto AB, ouero al DC; la parte al tutto, che è inconueniente. Adunque la BE parallela alla AD, non cade altroue, che nel punto C; onde lo spatio AC è parallelagrammo.

g Prop. 26

Sieno nel quarto luogo AB, e DC parallele, e gli angoli ADC, & ABC siano eguali, ne seguirà il medesimo, se ciò non è vero, *h* tirata BE parallela alla AD non cadente in E, si faccia il parallelagrammo AE. Adunque *i* l'angolo ABE sarà eguale all'angolo opposto D, ouero ad ABC, che era eguale a quello, la parte, e'l tutto, che non può essere. Adunque BE parallela alla DA nō cade altroue, che in C. Onde è manifesto quel che si propose.

h Corol. prop. 16.
i Prop. 26

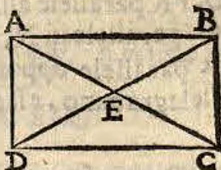
Nel quinto luogo AB, e DC sieno parallele, e i triangoli ADB, e CDB eguali; ne seguirà la medesima cosa: se ciò non è vero, *k* tirata la BE parallela alla DA, che non cada in C, si faccia il parallelagrammo EA. *l* Adunque il triangolo EDB sarà eguale al triāgolo BAD, ouero il triangolo BDC, ch'era eguale a lui, la parte al tutto, che non può essere. Adunque la parallela BE nō cade altroue, che in C. Per la qual cosa AC è parallelagrammo, il che bisognaua dimostrare.

k Corol. prop. 16.
l Prop. 26.

Nel sesto luogo i diametri AC, e BD siano segati per mezzo in E, sarà lo spatio AC ancora Parallelagrammo. Imperciochè i due triangoli AEB, CED anno intorno à gli angoli alla cima

E mi

m i lati eguali AE ad EC, BE ad ED. *n* Adunque gli angoli ABE, e CDE alterni saranno eguali tra loro, e per ciò *o* AB, DC saranno tra loro parallele: nel medesimo modo AD, e BC sarano parallele, e per questo sarà lo spatio ABCD Parallelagrammo. Le quali cose tutte conueniua dimostrare.



m *Corol. prop. 5.*
n *Prop. 4.*
o *prop. 26*

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA X.

Diuidere vna data retta linea in quante si voglia parti eguali.

Eucl. 9. del 6.

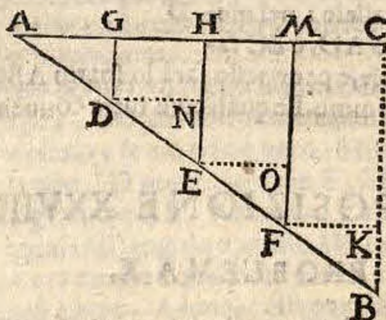
Sia la data retta linea AC, si deue diuidere in vna data moltitudine de parti eguali. Si tiri dal punto A la retta AB, che faccia in A qualsiuoglia angolo CAB, & in AB si tagli qualsiuoglia pezzo AD, e successiuamente *a* si facciano le parti DE, EF, FB ciascheduna eguale alla stessa AD; le quali siano tante, quante parti eguali deuono essere contenute in AC, e si congiunga la retta BC; e da i punti D, E, F dentro il triangolo ABC si tirino *b* le rette DG, EH, FM parallele alla base BC, le quali seghino la retta AC in G, H, M. Dico la retta AC essere diuisa nelle parti eguali imposte. Da punti D, E, F si tirino *c* le rette DN, EO,

a *Prop. 3.*

b *Corol. prop. 16.*

c *Corol. prop. 16.*

EO, FK parallele alla ſteſſa AC, diuidenti le vi-
d prop.26 cini parallele in N, O, K; e *d* perche a cagione
dele parallele oppoſte lo ſpatio GDNH è pa-
e Prop.26 rallelagrammo, *e* ſarà DN eguale alla GH: ed



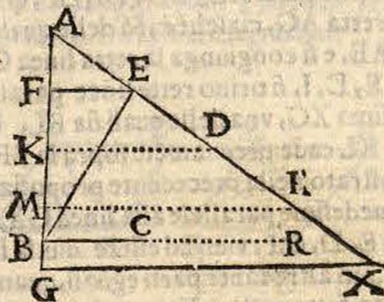
eſſendo ne' triangoli DNE, & AGD l'angolo
f prop. 15. eſteriore *f* NDE eguale all'angolo A interiore,
g prop.15. & oppoſto nelle parallele DN, AC, *g* e l'angolo
NED interiore, per le parallele HE, GD, eſſen-
do eguale all'angolo eſteriore, & oppoſto GDA,
& eſſendoſi i due lati adiacēti DE, AD fatti egua-
h prop.25 li. *h* Adunque i lati DN, & AG ſono eguali trà
loro, ma era GH eguale alla medeſima DN.
i Aſſ 1. Adunque GH *i* è eguale alla AG, per la medeſi-
ma ragione HM, & MC dimoſtrerannoſi eguali
alla medeſima AG. Laonde AC ſi ſarà diuiſa in
tante parti eguali AG, GH, HM, MC quante
ſono le parti comandate contenute nella retta
AB. E queſto era ciò che doueа farſi.

PRO

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA XIX.

Se due angoli interiori verso le medesime parti di vna retta linea segante due altre rette, saranno minori di due angoli retti; quelle rette linee allungate chiuderanno vn triangolo. Euclid. 29. del 6.



SIano i due angoli DAB, e CBA minori di due retti. Dico le linee AD, e BC cõcorrere verso le parti D, C, e formare vn triãgolo. Da qualsiuoglia punto E, posto sotto il punto A, si congiunga la retta EB, e si faccia *a* l'angolo BEF eguale all'angolo EBC. E perche i due angoli A, & ABC, cioè i trè angoli A, ABE, & EBC sono minori di due retti. Adunque *b* son minori de'due an- *a prop. 24* *b prop. 12*

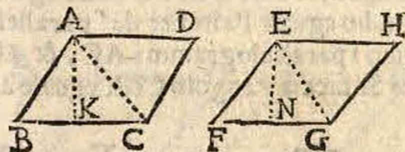
angoli BED, e BEA, i quali sono eguali à due ret-
c prop. 18 ti. Et è c l'angolo DEB eguale a i due angoli A
& ABE interiori, & opposti nel triangolo ABE
Adunque d l'altro angolo AEB sarà maggiore
d Ass. 4. dell' angolo EBC; e perciò l'angolo BEF (che
era eguale all'angolo EBC) sarà minore dell'an-
golo AEB, sì che la retta linea EF segarà la retta
e Prop. 13. linea AB, fra i punti A, e B. Si seghino in oltre
le rette FK, KM, & MG ciascheduna eguale alla
stessa AF, finche si faccia tutta la AG maggiore
di AB; Di poi nella retta AE allungata, si ta-
glino tante parti AE, ED, DI, IX, quante sono
nella retta AG, ciascheduna delle quali sia egua-
le ad AE, e si congiunga la retta linea GX, e da' i
f Corol. punti E, D, I, si tirino rette linee parallele alla
della pr. medesima XG, vna delle quali sia FL. Dico ora
16. che la EL cade precisamẽte sopra la EF. Perche
si è mostrato nella precedente proposizione, che
dalle medesime parallele alla linea GX, tirate da
i punti E, D, & I, vien ad essere diuisa la retta li-
nea AG in altre tante parti eguali, quante prima
se n'eran fatte nella AX: vna delle quali sarà la
AL: e però la AL tante volte misurarà la AG,
quante la AE misura la AX, ma la AF misura la
AG tãte volte, quante la AE misura la AX. Adũ-
que le AL, & AF misureranno egualmente la
g Ass. 5. stessa AG: per la qual cosa g le AL, & AF sono
eguali tra loro. E però il punto L cade sopra F;
e la retta EL cade sopra la EF; ma era la EL pa-
rallela alla XG. Adunque la retta linea EF sarà
parallela ad XG: e tirandosi dal pũto B nel trian-
golo

gio GAX la retta BC dentro lo stesso triango-
o, parallela alla base GX; Adunque la BC pro-
otta segarà l'altro lato AEX nel punto R. Il che
isognaua dimostrare.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA XX.

Se in due parallelagrammi, che abbino vn' angolo eguale à vn' angolo, saranno le base trà loro eguali, e anche le altezze eguali; saranno eziandio eguali trà loro i parallelagrammi.



Sieno i due parallelagrammi BD, & FH, ne' quali gl'angoli B, & F eguali, e le base BC, G, e le perpendicolari, ouero le altezze AK, N eguali. Dico i parallelagrammi BD, FH es- re eguali: si tirino i diametri AC, EG Perche ' triangoli ABK, & EFN, gli angoli B, & F so- no eguali, e i due angoli K, & N sono retti, & i ati AK, EN eguali, quegli che sono opposti ad ngoli eguali. *a* Adunque le BA, FE sono eguali. a *prop. 25*

E per-

E perche intorno à gli angoli eguali B,F, i lati AB, EF sono eguali, e parimente sono eguali i lati BC, FG. b Adunque i triangoli ABC, EFG sono eguali, e c i loro doppi, cioè i parallelagrammi BD, FH saranno eziandio eguali. Il che &c.

b Prop. 4.
c prop. 26

PROPOSIZIONE XXXI.

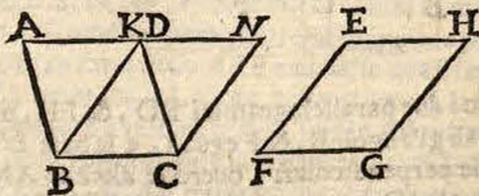
TEOREMA XXI.

Eucl. 35. 36. del 1.

Se due parallelagrammi non equiangoli aueranno le base, e le altezze eguali saranno eguali.

NE' parallelogrammi AC, & EG non equiangoli, le base BC, FG siano eguali, e siano eziandio eguali l'altezze de' parallelogrammi. Dico i parallelogrammi AC, & EG essere eguali. a Si faccia l'angolo CBK eguale all'angolo

a prop. 24

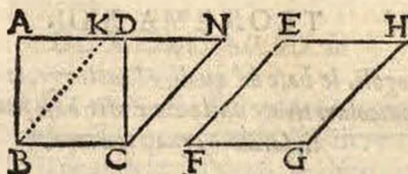


lo F, e b si tiri CN parallela à BK, e la AD prolungata seghi le parallele c BK, CN in K, & N, d si sarà fatto il parallelogrammo BCNK, essendo ancora AN parallela alla BC. Perche ne' triangoli ABK, e DCN e l'angolo CDN esteriore

b Corol. prop. 16
c prop. 29
d prop. 26
e prop. 15.

riore è eguale all'angolo BAK interiore, & opposto nelle parallele AB, CD. E parimente perche *f* l'angolo interiore CND è eguale a BKA nelle parallele CN, BK, & i due lati *g* BA, CD sottendenti, gli angoli eguali sono eguali tra loro, essendo lati opposti del parallelogrammo AC. Adunque *h* i triangoli ABK, & DCN sono eguali tra loro. *Et i* aggiunta communemente (nel primo, e secondo caso) la figura BCDK, il parallelogrammo AC sarà eguale al parallelogrammo BN, ma (nel terzo caso) *k* leuato via communemente il triangolo DOK, i quadrilateri ABOD, & NKOC saranno eguali tra loro, & *l* aggiunto communemente il triangolo BOC,

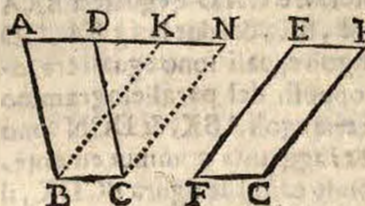
f prop. 15.
g prop. 26
h prop. 25
i Ass. 2.
k Ass. 3.
l Ass. 2.



similmente il parallelogrãmo ABCD sarà eguale al parallelogrammo BCNK. E perche i parallelogrammi BN, & AC sono tra le medesime parallele AN, e BC, *m* saranno egualmente alti, per essere eguali tutte le perpẽdicolari, ouero distanze delle parallele AN, e BC. Ma furono posti i parallelogrammi FH, & AC egualmente

m Prop. 26.

alti.

alti. Adunque i parallelogrammi BN, & F
sono egualmente alti, & anno le base BC, F


eguali tra lor & eguali anco ra tra loro g angoli KBC, & F. *n* Adunque il para lelogram mo FH è egua le al parallelo

n *Prop.* 30.

grammo BN; mà si dimostrò il parallelogram mo AC eguale al medesimo parallelogramm BN. Adunque *o* i parallelogrammi AC, & FH sono eguali tra loro.

o *Ass.*1.

PROPOSIZIONE XXXII.
TEOREMA XXII.

Euclid. 37. e 38. *del* 1.

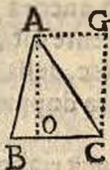
I triangoli, le base de' quali, e le altezze, ouero le per pendicolari tirate dalle cime alle base sono egua li, saranno eguali trà loro.

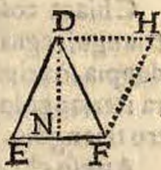
ABbiano i triangoli ABC, e DEF, le base BC, & EF eguali tra loro, e le perpendico lari, ouero le altezze AO, DN tirate da punti A D alle base BC, & EF siano eguali. Dico i trian goli ABC, DEF essere tra loro eguali. Tirata AG parallela alla BC, e CG fatta parallela alla BA, si faccia il parallelogrammo ABCG; nel me desimo modo si perfezioni il parallelogrammo EDHF. Perche i parallelogrammi BG, & EH

a *Corol. prop.*16.

anno

anno le base BC, EF eguali, e l'altezze eguali (essendo le eguali perpendicolari AO, & EN altezze de' parallelogrammi BG, & EH) adunque *b* i parallelogrammi BG, & EH sono eguali trà loro, & *c* è il parallelogrãmo EH doppio del triangolo DEF. Adũque *d* il parallelogrammo BG eguale à quello, sarà parimente doppio del medesimo triangolo DEF. Ma *e* il medesimo parallelogrammo BG è doppio del triangolo ABC. Adunque *f* i triangoli ABC, e DEF saranno eguali trà loro. Il che bisognaua &c.



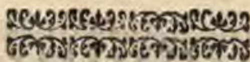


b *prop.* 31
c *prop.* 26
d *Ass.* 5.
e *Prop.* 26
f *Ass.* 5.

COROLLARIO I.

Manifesta cosa è, che se il parallelogrammo, & il triangolo auerano le base eguali, e l'altezze eguali, il parallelogrammo sarà doppio dello stesso triangolo. *Eucl.* 4. *del* 1.

Auenga che il parallelogrãmo BG, & il triangolo DEF anno le base BC, & EF eguali, & eziãdio eguali l'altezze, e dimostrossi il parallelogrammo BG doppio del triangolo DEF.



COROLLARIO II.

Chiara coſa è ancora, che ſe ſaranno due triangoli egualmente alti, e la baſe dell'vno ſarà doppia, ò tripla &c. della baſe dell'altro: ancora il triangolo ſara doppio, ò triplo &c. dell'altro triangolo.

Atteſo che, ſe ne' triangoli ABC, DEF egualmēte alti, la baſe DC ſara eſēpigrazia quadrupla di EF, e da i punti delle eguali diuiſioni M, R, & S, ſi congiungan alla cima A rette linee, il triangolo ABC ſi ſara ſpartito in tanti triangoli ABM, AMR, ARS, ASC, quāte ſono le baſe eguali BM, MR, RS, SC; e ſono i ſopradetti triangoli egualmente alti sì tra di loro, come allo ſteſſo DCF, impercioche la perpendicolare tirata da A ſopra la baſe BC, è l'altezza cōmune, & eguale all'altezza del triangolo DEF. Adunque tutti g i detti triangoli ſono eguali tra loro, come anche allo ſteſſo triangolo DEF. E perciò il triangolo ABC ſarà quadruplo del triangolo DEF, conforme erano le baſe: e così nell'altre moltiplicazioni.



g prop. 32



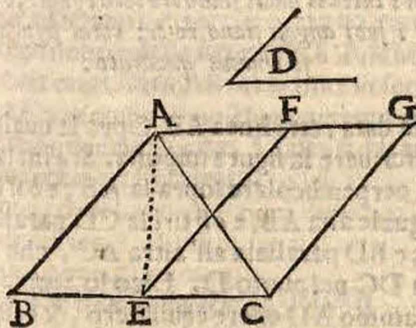
PRO-

PROPOSIZIONE XXXIII.

PROBLEMA XI.

Descriuere vn parallelogrammo eguale ad vn dato triangolo, che abbia vn' angolo eguale ad vn dato angolo. Euclid. 42. del I.

Sia il dato triangolo ABC, e l'angolo D; si deue descriuere vn parallelogrammo eguale al triangolo, che abbia vn'angolo eguale all'angolo D. *a* Segata la BC per mezzo nel punto E, si tiri la AE, e *b* si faccia l'angolo CEF eguale all' angolo D, e si tiri *c* CG parallela alla EF, & AG a *prop.* 9. b *prop.* 24 c *Corol. prop.* 16.



parallela alla BC, che seghi le parallele ne' punti FG. E manifesto *d* lo spazio CF essere parallelogrammo, il quale auendo la medesima base d *prop.* 26

EC col triangolo ACE, ed essendo i sopradet
spazi fra le medesime parallele AG, & EC. Ad
e Corol. 1 prop. 32. que *e* il parallelogrammo EG è il doppio del tri
angolo AEC. *f* Ma il triangolo ABC è il dopp
f Corol. 2. prop. 32. del medesimo triangolo AEC, per esser la ba
BC doppia della base EC, & l'altezza commu
g Ass. 5. ne. Adunque il parallelogrammo *g* EG è eguale
al triangolo ABC, & hà vn' angolo CEF eguale
all'angolo D. Per la qual cosa si è formato &c.
il che bisognaua fare &c.

PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA XII.

Euclid. 46. del 1. *Descriuere sopra vna data retta linea vn quadrilatero tutti i lati del quale siano trà loro eguali, e tutti i suoi angoli siano retti: cotal figura si chiami quadrato.*

a prop. 10. SIa la data retta linea AB, sopra la quale si deue
descriuere la figura imposta. Si *a* inalzi da A
b prop. 3. la CA perpendicolare sopra la AB; e *b* si tagli la
c Corol. prop. 16. CA eguale alla AB, e *c* si tiri la CD parallela al
la AB, e BD parallela all' altra AC, che incon
d Dalla prop 29. e prop. 26 tri *d* la DC nel punto D. Dico lo spazio paral
lelogrammo AD essere equilatero, & equiango
lo. Perche AD è parallelogrammo, adunque
il lato CD è eguale al lato opposto AB, ma per
f Ass. 1. la costruzione al medesimo AB è eguale ancora
AC. Adunque *f* CD è eguale alla CA; Ma di nuo
uo

g al medesimo CA è eguale il lato oppostogli BD. Adunque BD è eguale alla CD. Ed è eguale al medesimo *h* CD il lato opposto AB. Adũque BD, & AD sono eguali trà loro. Si che è manifesto tutti i quattro lati del parallelogrammo AD essere eguali tra loro. Poi perche nelle parallele AC, e BD segate dalla AB *i* due angoli intereriori A, e B sono eguali à due retti; & è l'angolo A, per la costruzione, retto. Adunque l'angolo B è retto ancor'egli. Ed essendo gli angoli *k* C, e D eguali à suoi opposti. Adũque gli angoli C, e D saranno ancor essi retti; e perciò saranno retti tutti quattro gli angoli della figura AD. Adunque sopra la data retta linea AB abbiamo descritto la figura AD, la quale dimostrato auiamo essere equilatera, & equiangola. Come si ricercaua. Ora ella si chiami Quadrato.



g *prop.26*
h *prop.26*
i *prop. 15.*
k *prop.26*

Fine del Libro primo.

LIBRO SECONDO

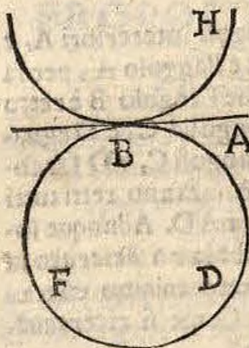
DE' CERCHI.

DIFFINIZIONI.

I.

LA retta linea si dice toccare il cerchio, quando arriuando nel cerchio non lo sega, ma cade fuori.

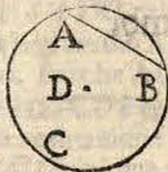
II.



Vn cerchio si dice toccar l'altro cerchio, quando la circonferenza dell' vno toccando l'altra, non sega il cerchio.

Se cadendo alcuna retta AB in vn cerchio, e prodotta non lo sega, ma cade fuori del cerchio, si chiamerà Tangente; e se la circonferenza BH caderà nel cerchio BD, e non lo segherà, sarà chiamata parimente Tangente. Ma se prodotta segherà il cerchio, sarà detta Secante.

III.

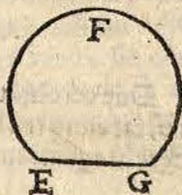


Allora si dice, che vna retta linea sia applicata, ouero adattata al cerchio, quãdo i suoi termini saranno alla circonferenza del cerchio.

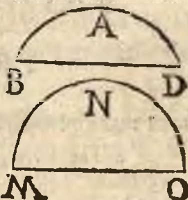
Esem-

Esempigrazia la retta linea AB sarà adattata, ouero applicata al cerchio ABC, quando i termini A, & B della stessa retta linea, saranno nella stessa circonferenza del cerchio AB.

IV.

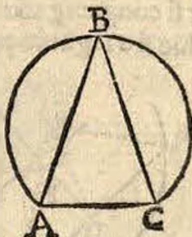


La Porzione del cerchio è vna figura contenuta dalla linea retta, e dalla circonferenza.



Così lo spazio BAD, come MNO, ouero EFG sarà porzione di cerchio. Ma queste porzioni anno nomi diuersi. Poiche se il cerntro del cerchio sarà dentro la sua superficie, sarà chiamata porzione maggiore, come è EFG, ma se sarà fuori di esso, come in BAD, si chiamerà porzione minore. E finalmente se il centro sarà nella stessa retta linea Secante, come in MO, cotal porzione sarà detta Semicerchio.

V.



Angolo nella porzione si dice esser quello, che vien compreso da due rette linee concorrenti in qualsiuoglia punto della circonferenza, e terminate nell'estremità della retta linea, che è base della porzione.

In quella guisa, che nella porzione ABC, le due rette linee AB, e CB concorrenti in qualsiuoglia suo punto B, eleuate da termini A, C, fanno l'angolo ABC compreso nella detta porzione.

ASSIOMA.

Due cerchi, che abbiano i raggi eguali trà loro, saranno trà loro eguali. E per il contrario cerchi eguali auranno eguali i raggi.

PROPOSIZIONE I.

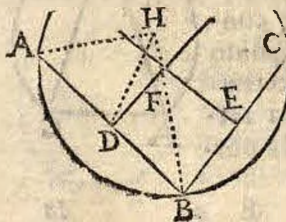
PROBLEMA I.

Eucl. 1. e 2. del lib. 3.

Data vna circonferenza del cerchio, ritrouare il centro del cerchio, di cui ell' è circonferenza.

SIa la data circonferenza ABC, ò intera, ò no. Deue ritrouarsi il centro di quel cerchio, di cui ABC è circonferenza. Si prendano nella detta circonferenza tre qualunque punti A, B, & C, e si congiungano le rette AB, e BC. Di poi amendue si *a* seghino per mezzo ne' punti D, & E, da' quali si *b* eleuino le perpendicolari DF sopra AB, & EF sopra BC. Perche le rette linee AB, CB non sono in diritto, per la curuità del cerchio. Adunque la-

a prop. 9. del lib. 1.
b prop. 10 del lib. 1.



con:

congiunta retta linea DE diuiderà gl'angoli ret- FDB,& FEB, e perciò i due angoli FDE,& FED saranno minori di due retti; *c* onde le rette linee DF,& EF concorreranno, come nel punto F. Dico ora il punto F del concorso delle perpendicolari essere il cētro di quel cerchio, di cui ABC è circonferenza. Se questo non è vero, sia centro del cerchio ABC il pūto H diuerso da F, del cōcorso delle rette linee DF, EF: e per ciò il punto H caderà se non fuori di amendue, almeno fuori di vna delle perpēdicolari DF. Si congiungano le rette AH, BH, DH. Perche ne' due triangoli AHD, DHB i lati AD, BD sono eguali, e DH commune, e le base AH, BH eguali, essendo raggi del cerchio. Adūque gl'angoli *d* ADH, BDH sono eguali, e *e* perciò retti; ma era l'angolo ADF retto. Adunque gl' angoli ADF,& ADH sono eguali trá loro; la parte, e'l tutto, che è impossibile. E però il punto H diuerso dal punto F non può esser centro del cerchio ABC. Per la qual cosa lo stesso punto F sara il centro. Il che douea farsi.

c *prop.* 29 *del lib.* 1.

d *prop.* 7. *del lib.* 1.

e *prop.* 10 *del lib.* 1.

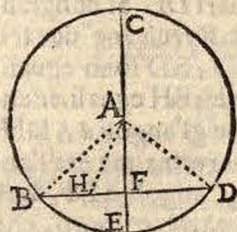


PRO-

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA I.

Euclid. 3. del lib. 3. *Se vna delle rette linee applicate nel cerchio, distesa per il centro, sega per mezzo vn' altra retta non tirata per il centro, la segherà ad angoli retti. E se la sega ad angoli retti, la segherà ancora in mezzo.*



LA retta linea CE applicata per il centro A del cerchio DBC diuida la retta BD nõ distesa per il centro in parti eguali nel punto F. Dico la retta CF essere perpendicolare sopra la FD. Tirati i raggi BA, & AD, ne' triangoli AFD, & AFB i due lati BF, & FD sono eguali in virtù del supposto, & FA commune, e le base AB, & AD eguali, essendo raggi del cerchio.
a prop. 7. del 1. *a* Adunque gli angoli AFB, & AFD saranno eguali, e *b* perciò retti. Il che bisognaua nel primo luogo dimostrare. b prop. 10 del 1.

Nel secondo luogo la AF tirata per il centro sia perpendicolare alla DB. Dico la BD esser segata per mezo in F. Impercioche se questo non è vero, *c* si diuiderà in mezo la BD in diuerso sito, che in F, e sia H, e si congiungano le rette linee AH, AB, AD. E perche la AH distesa per il centro c prop. 9. del 1.

tro

tro ſega per mezo la retta BD in H. Adunque (per la prima parte) l'angolo AHB è retto; ma era retto l'angolo AFB. Adunque nel triangolo AHF, l'angolo eſteriore AHB è eguale all'angolo F interiore, & oppoſto, *d* che è inconueniente. Non in altro ſito adunque che in F può eſser ſegata per mezo la retta BD. Per lo che è manifeſto quel che ſi propoſe.

d *Corol. della prop. 18. del* 1.

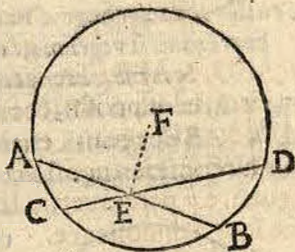
PROPOSIZIONE III.

TEOREMA II.

Se due rette linee applicate nel cerchio, non tirate per il centro ſi ſegheranno, elle non ſi ſegheranno in parti eguali ſcambieuolmente.

Eucl. 4. del lib. 3.

NEl cerchio ABD due rette linee AB, & CD ſi ſeghino ſcambieuolmēte in E, ma vna delle applicate, ò ambedue non paſſino per il centro F. Dico non poterſi ſcambieuolmente ſegare per mezo. Poiche ſe vna di loro paſſa per il centro, non ſarà ſegata per mezo dall'altra, che non paſſa per il centro; auuegnache nel centro ſolamente il diametro ſi ſparte per mezo. Ma ſe ne l'vna, ne l'altra paſſa per il centro, ſi tiri dal centro F al concor-



corſo E la retta FE. Si dee dimoſtrare le rette AB, e CD nel punto E non ſegarſi ſcambieuolmente per mezo. Poiche, ſe queſto non è vero, ſieno amendue ſegate in parti eguali nel pũto E. E perche FE tirata per il centro ſega AB per il mezo, adunque *a* la ſegherà ad angoli retti. Per la medeſima ragione la retta CD ſara ſegata ad angoli retti dalla medeſima FE. Laonde gl'angoli FEB, & FED ſaranno retti, e perciò eguali tra loro; la parte al tutto, che è impoſſibile. Non ſi ſegano adunque in parti eguali amẽdue le rette AB, & CD nel punto E. Per la qual coſa &c.

a Prop. 2. di queſto lib.

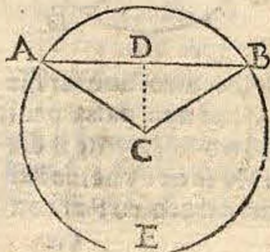
PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA III.

Euclid. 2. del lib. 3.

Se nella circonferenza d'vn cerchio ſi piglieranno due punti quali ſi vogliano, la retta linea, che li congiugne, caderà dentro al cerchio.

NEl cerchio ABE congiunga la retta linea AB due punti, quali ſi vogliano preſi nella ſua circonferenza. Dico che la retta AB cade dẽtro al cerchio. Impercioche preſo nella retta AB qualſiuoglia punto tramezo D, ſi congiungano dal cẽtro C le rette CA, CB, CD. Perche nel triangolo Iſoſcele CAB i due lati CA, & CB



CB sono eguali. Adunque *a* gli angoli A, & B sopra la base AB saranno eguali tra loro. Ma nel triãgolo CBD, l'angolo esteriore *b* CDA è maggiore dell'interiore, & opposto B. Adunque il medesimo angolo CDA sarà maggiore dell'angolo CAD; e perciò *c* il lato AC opposto all'angolo maggiore sara maggiore del lato DC. Per la qual cosa la retta CD sara minore del raggio del cerchio CA, e perciò CD non arriua alla circonferenza del cerchio. Onde il punto D sarà dentro il cerchio. Per la medesima ragione qualsuoglia altro pũto della retta AB caderà dentro il cerchio; e però la medesima retta linea farà di sè la dentro il cerchio. Il che bisognaua dimostrare.

a prop. 6. del lib. 1.
b Corol. prop. 18. del lib. 1.
c prop. 20 del 1.

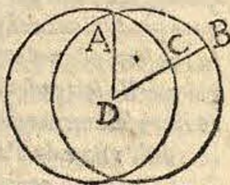
PROPOSIZIONE V.

TEOREMA IV.

Se due cerchi si segano l'vno l'altro, ouero si toccano dalla parte di dentro, non aueranno vn medesimo centro.

Euclid 5. e 6. del lib. 3.

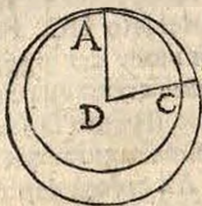
Sieno i due cerchi AB, & AC, i quali si seghino, ouero si tocchino dalla parte di dentro nel punto A. Dico che essi non anno vn medesimo centro. Poiche, se è possibile, sia D il centro



dell'

dell'vno, e dell'altro, dal quale si tiri al toccamento, ouero al segamento A la retta DA, e vn'altra DCB, che seghi l'vn, e l'altra circonferenza ne' punti C, & B. Perche D è centro del cerchio AB. Adunque *a* il raggio BD è eguale al raggio DA. Di più perche D si pone esser centro del cerchio AC, il raggio CD sarà eguale al medesimo raggio DA, e perciò le due rette BD, & CD saranno eguali tra loro; la parte, e'l tutto, che non può essere. Non possono adunque i due cerchi AB, & AC auere il centro D commune. Il che bisognaua dimostrare.

a *Ass. 12. del lib. 1.*



PROPOSIZIONE VI.

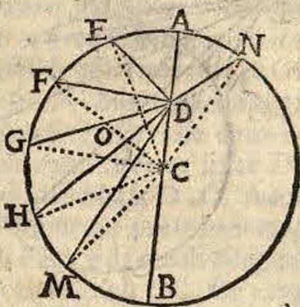
TEOREMA V.

Euclid. 7. & 8. del lib. 3.

Delle rette linee cadenti nella circonferenza da vn punto, che non è centro del cerchio, la massima è quella, che passa per il centro, la minima è l'auanzo, ò produzione del diametro. Dell'altre poi, quella che sottende vn'angolo maggiore al cẽtro è maggiore della sottendente vn'angolo minore, e due rette linee solamente caderanno dal medesimo punto, e dall'vna, e dall'altra parte del diametro eguali trà loro.

Nel

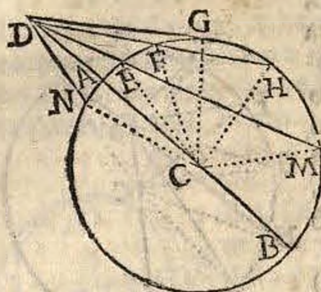
NEl cerchio AGB, il cui centro sia , si prenda qualsiuo- punto D diuerso centro (ò dentro erchio ,come nella ma figura , ò fuori, me nella seconda, ò la sua circonferen , come nella terza) al punto D si tirino circonferenza del



chio quante si vogliano linee rette DB , DM, H, DG, DF, DE, DA , & DN , delle quali la passi per il centro . Dico la retta DB essere massima di tutte . Si congiungano dal centro i punti M,H,G &c. i raggi CM,CH,CG &c. erche i due raggi CM, e CB sono eguali , ag- nta communemente la CD, le due rette MC, D insieme saranno eguali alla retta BD. Ma M*b* è minore de i due lati CM, & CD insieme triangolo MCD. Adunque MD è minore di . Per la medesima ragione DH sarà minore DB, e così l'altre tutte DG , DF &c. Laonde etta BD, che passa per il centro è la massima utte. il che douea mostrarsi nel primo luogo. ei secondo luogo dico la DA (che è l'auan- i diametro nella prima figura , & il suo al- amento nella seconda) essere la minima di le rette , che possono dal punto D esser ti- nel cerchio . Perche nel triangolo DCE la

a *Ass.* 12. *del lib.* 1.

b *prop.* 21 *del lib.* 1.

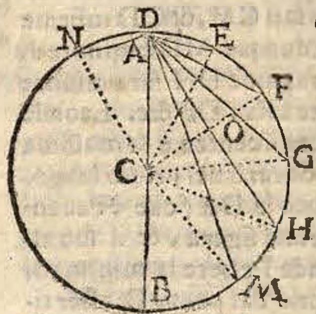


la DA è la diffe-renza de' due la-DC, & EC, auue-gna che CE, e C-raggi del cerc-sono eguali tra lo-ro. c Adunque la DA differenza d-lati sara minore della base DE. N-medesimo modo l-

c prop.21 del lib. 1.

A sarà minore di qualsiuoglia altra DF, ò DG, DN &c. Per la qual cosa DA è la minima di tut-te le rette, che dal punto D si possono tirare n-cerchio. Che era la secõda parte da dimostrarsi.

Nel terzo luogo la retta DG sottenda l'ango-lo GCD al centro, maggiore dell' angolo FCD suttefo dalla retta FD. Dico la DG esser mag-giore della DF: e se per auuentura la DG sega-



raggio FC dentro cerchio nel punto O (come nel primo, terzo caso). Perche nel triangolo GOC due lati GO, & OC lo maggiori di GC, e pa-rimente nel triango-DOF i due lati DO, OF insieme presi so maggiori di FD: pe questo le quattro ret-linee

d prop.21 del 1.

nee GO, OD, FO, & OC, cioè le due GD, & C insieme prese saranno maggiori delle due D, e GC; e da questi aggregati diseguali si leui- o via i raggi eguali GC, & FC, rimaria *e* la GD e *Ass.* 4. maggiore di FD. Ma se DG non sega il raggio *del lib.* 1. C (come nel secondo caso). Perche dentro il iangolo DGC concorrono le rette linee DF, CF tirate da' termini della base D, C. Adun- ue *f* le due GC, & GD insieme prese son mag- f *prop.* 22. iori delle due CF, & FD; e da questi diseguali *del lib.* 1. ggregati si tolgano via l'eguali CG, CF raggi l cerchio, g l'auanzo GD sarà maggiore dell' g *Ass.* 4. ianzo FD. *del lib.* 1.

Nel quarto luogo si faccia *h* l'angolo al cen- h *prop.* 24 o DCN eguale all'angolo DCE, e si congiun- *del lib.* 1. a la DN. Perche ne' triangoli DCN, e DCE in- rno à gl'angoli eguali al centro sono i lati NC, E eguali (per esser raggi del cerchio) e CD la- commune. Adunque le base *i* DN, e DE sono i *prop.* 4. uali, ma qualsiuoglia altra, che si tira di là dal *del lib.* 1. nto E, come è DF, si è dimostrata maggiore DE, auuenga che è opposta all'angolo mag- re DCF al centro. Adunque sara maggiore cora della DN. Di più qualsiuoglia altra tira- di qua da DE verso il punto A, si è dimostrata nore della DE. Adunque sara ancora minore DNE, però due rette solamente DN, e DE ono esser tirate eguali dall'vna, e dall'altra te del diametro. Il che bisognaua dimostrare.

COROLLARIO I.

Euelid 9. del lib. 3. Se sarà preso vn punto dentro il cerchio, d
quale cadano alla circonferenza più di due re
linee eguali trà loro, il preso punto sara cent
del cerchio. Perche da qualsiuoglia punto, ch
non è centro, posson tirarsi solamente due re
te linee eguali, e non più, come si caua dall'vlt
ma parte della proposizione. Adunque il punt
dal quale più di due rette linee cadono eguali,
impossibile, che sia collocato fuori del centr
onde bisogna necessariamente, che sia il centro

COROLLARIO II.

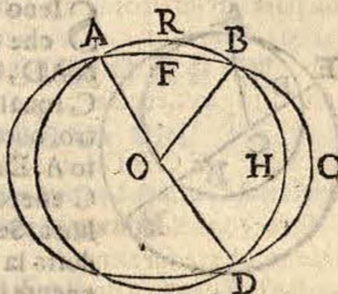
Eucl. 24. 25. del lib. 1. Si raccoglie dalla terza parte di questa prop
sizione, che se saranno due triangoli, che abbia
no due lati eguali a due lati l'vno a l'altro, e l'an
golo compreso maggiore dell'angolo compre
da detti lati, la base sarà maggiore della base. E
per il cõtrario. Imperciochè ne'triangoli DCM
& DCH i lati MC, HC erano eguali, & il lat
DC comune, e l'angolo DCM maggiore del
angolo DCH, & è stata dimostrata la base DM
maggiore della base DH. E per il contrario s
DM fusse maggiore di DH, l'angolo MCD sar
maggiore dell'angolo DCH. Perche il punto
della retta linea DM è più rimoto del termine
della circonferenza, che non è H termine dell
minor DH, e però l'angolo DCH sarà parte d
tutto l'angolo DCM.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VI.

Vn cerchio in più che in due punti non può segar' vn' altro cerchio. *Eucl. 10. del lib. 3.*



Si seghino i due cerchi ABH, ABCF in più che due punti A, B, & D, se è possibile: e *a* ritrouato il cētro O del cerchio ABH, da quello si tirino i raggi AO, OB, & OD à i trè punti de i segamenti de' cerchi, i quali raggi saranno eguali trà loro. E perche dentro l'altro cerchio ABCF è stato preso il pū to O, e da lui cadono nella circonferenza del cerchio più di due rette linee eguali AO, OB, & OD. Adunque *b* il punto O è cētro del cerchio ABCF. Ma era il medesimo punto O centro dell'altro cerchio ABH; per questo i due cerchi, che si segano, anno il medesimo centro, *c* che è inconueniente. Due cerchi adunque non si segano in più che in due punti. Il che bisognaua dimostrare.

a prop. 1. di questo.

b Corol. 1 prop 6. di questo.

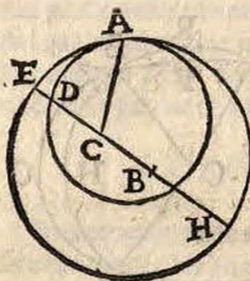
c prop. 5. di questo.

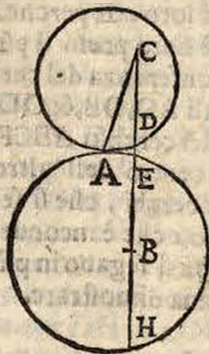
PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VII.

Eucl. 11. & 12. del lib. 3.

Vna retta linea prodotta per i centri di due cerchi, che si tocchino, passerà per il loro toccamento.





a prop. 6. di questo.

SIeno i due cerchi AE che abbia il centro B & AD, che habbia il cētro C, i quali si tocchino di dentro, ouero di fuori nel punto A. Dico i tre punti B, A, C esIere in vna sola retta linea. Se ciò nō è vero, prodotta la linea BC congiugnente i centri, seghi la circonferēza del cerchio AE ne' punti H, & E, e la circōferenza del cerchio AD nel pūto D. E perche è stato preso il punto C, che nō è centro del cerchio AEH (dentro lo steſſo nella prima figura, e fuori nella seconda) e dal punto C per il centro B è stata tirata la retta linea CEBH, la CE (che è l'auanzo del diametro HE) *a* sarà la minima di tutte

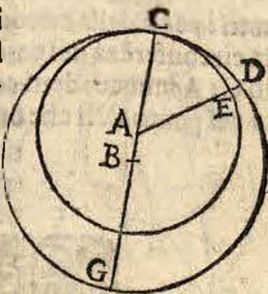
tutte le rette, che cadono dal punto C nella circonferenza del cerchio AEH. Adunque la CE è minore della CA,& è *b* CA raggio eguale al raggio CD nel cerchio AD. Perciò la CE è minore della CD, il tutto minore della sua parte, che è cosa impossibile. Adunque la retta BC congiungente i centri (prodotta) non sega i cerchi in altro sito, che nel loro toccamento A. Il che bisognaua dimostrare. b *Ass.12. lib.1.*

PROPOSIZIONE IX.

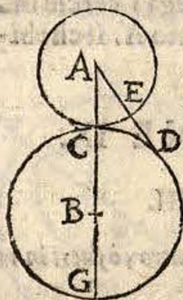
TEOREMA VIII.

Vn cerchio tocca l'altro cerchio ò dentro, ò fuori in vn punto solamente. *Euclid. 13. del 3.*

IL cerchio CE, il di cui centro sia A, tocchi il cerchio CD, il di cui centro sia B, nel pũto C, (cioè dentro nella prima figura, e fuori nella seconda) dico che i cerchi si toccano solamente in vn punto. Tirata per il toccamẽto C, & per i centri B, & A la retta linea BAC, la quale sarà vna sola retta, come dimostrammo nella precedente proposizione, e prodotta fino al pũto G; e tirata douunque si voglia vn' altra retta AED, che seghi le



circonferenze de' cerchi ne' punti E, & D. Per-
che nel cerchio CD è stato preso il punto A, che
non è suo centro, e da quello sono state tirate più
rette linee AC, & AD, & AC il compimento del
a Pro.6. di questo lib. diametro CG. Adunque AG è a la minima di
tutte, e perciò minore di AD. Ma AE è eguale
ad AC, perche sono raggi del
medesimo cerchio CE. Adun-
que AE è minore di AD, e pe-
rò il punto D è situato di là dal
punto E. Per la qual cosa il pun-
to D della circõferenza CD ca-
de fuori del cerchio CE; e così
qualsiuoglia altro punto della
circonferenza del cerchio CD
si dimostrerà cadere fuori della
circonferenza CE. Cadendo



tutti i punti della circonferenza CDG fuori del-
la circonferẽza del cerchio CE cauatone il pun-
to C; Adunque i detti cerchi si toccano solamen-
te nel punto C. Il che bisognaua dimostrare.



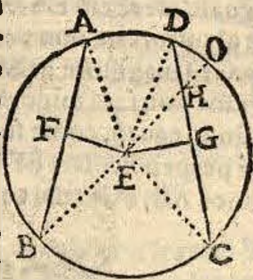
PRO-

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA IX.

perpendicolari tirate dal centro sopra eguali rette linee applicate nel cerchio, saranno eguali trà loro. E se le perdendicolari saranno eguali trà loro, eziandio l'applicate saranno eguali trà loro. Le dette perpendicolari si chiamino distanze dal centro delle rette linee applicate. *Eucl. 14. del lib. 3.*

NEl cerchio ABC, il di cui centro sia E, siano applicate le due rette eguali AB, & CD, quali sieno perpendicolari del centro E le te linee EF, & EG. Dico EF, & EG essere uali. Si congiungano le rette EA, EB, EC, & D. Perche ne'due triangoli ABE, e DEC, i due i AB, BE sono eguali à lati DE, & CE, e le ba- AB, e DC si pongono uali. Adunque *a* gli an- li A, & D saranno egua- ra loro: ed essendo ne' ngoli AFE, DGE due goli retti F, & G eguali, me anche si sono dimo- ati eguali gl'angoli A, & ed eguali sono i lati AE, & DE, che sono op- sti a gl'angoli retti (per esser raggi del mede- no cerchio). Adunque *b* i lati EF, & EG (che sono



a prop. 7. del lib. 1.

b prop. 25 del 1.

sono le perpendicolari tirate dal centro sopra l'applicate) sono eguali tra loro.

Sieno nel secondo luogo le perpēdicolari EF & EG eguali. Dico le applicate AB, & CD es-ser ancor'elle eguali. Imperciochè, se questo non è vero, vna di loro sarà maggiore dell'altra; e sia la CD maggiore; e le perpendicolari EF, &

c prop. 2. di questo.

EG tirate dal centro *c* le segano per mezo in G, & F. Adunque ancora la GD metà della maggiore CD sarà maggiore della FA metà della minore. Si seghi adesso dalla maggiore *d* GD la

d prop. 3. del lib. 1.

retta linea GH eguale ad FA, e si congiunga la EH, la quale prodotta seghi la circonferenza in O. E perche ne' triangoli AFE, & HGE intorno à gli angoli retti F, & G, i due lati AF, & HG sono eguali, e furono parimente eguali EF, & EG. Adunque *e* la base EH sarà eguale alla base EA

e prop. 4. del lib. 1.

& EA è raggio del cerchio. Per questo EH è eguale al raggio EA, ouero ad EO, la parte eguale al tutto, che non può essere. Non sarà dunque la CD maggiore della AB. Per la medesima ragione non sarà minore. Laonde AB, & CD saranno eguali, come fu proposto. Si chiamino ora le perpendicolari EF, & EG Distanze delle rette linee AB, e CD dal centro E.



PRO-

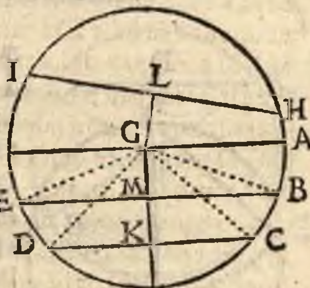
PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA X.

La massima delle rette linee applicate in vn cerchio è il diametro, e dell'altre la più vicina al centro è mai sempre maggiore della più rimota. *Eucl. 15. del 3.*

NEl cerchio ABC, il centro del quale è G, sia il diametro AF, & HI più vicina al centro, che nõ è CD. Dico la massima di tutte essere AF, e la HI maggiore di DC. Si tirino *a* dal centro le distanze, ouero le perpendicolari GK, & GL sopra la CD, & la HI, sarà la distanza GK maggiore, che non è GL per la supposizione. Si seghi *b* adũque la GM eguale alla GL, e per il pũto M si distenda *c* la BME perpendicolare alla GM, e si congiungano le rette, GB, GC, GD, & GE. Perche le distanze GL, & GM sono eguali. Adunque *d* le rette BE, & HI sono eguali tra loro. E perche le due rette BG, & GE (le quali insieme sono eguali al diametro AF) sono maggiori della *e* BE, il diametro AF sarà maggiore di BE, ouero di HI. Per la me-

a prop. 11. del lib. 1.



b prop. 3. del lib. 1.

c prop. 10 del lib. 1.

d prop. 10 di questo.

e Prop. 21 del lib. 1.

medeſima ragione la AF ſara maggiore di qualunque altra C D. Di più perche i due lati BG, G E del triãgolo BGE ſono eguali à due lati CG, & GD dell'altro triangolo DGC; & è l'angolo BGE maggiore dell'angolo CGD ſua parte. Adunque la baſe *f* BE è maggiore della baſe CD, cioè HI è maggiore di CD. Per la qual coſa &c.

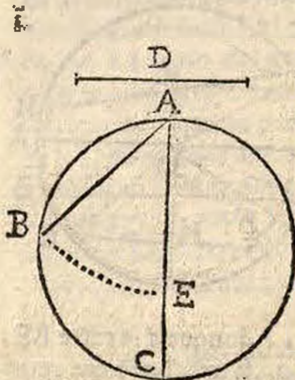
f Corol. 2. della propoſ. 6. di queſto.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA II.

Euclid. 1. del lib. 4.

Applicare in vn dato cerchio vna retta linea eguale ad vn'altra retta linea data. Ma biſogna che la retta linea data non ſia maggiore del diametro del cerchio.



NEl cerchio ABC, il di cui diametro ſia AC, ſi dee applicare vna linea retta, che ſia eguale alla data retta linea D. Ma conuiene che la linea D ſia eguale, ò minore del diametro AC, e ſe ſarà eguale, ſi ſara fatto il problema. Ma ſe D ſara minore del diametro AC, ſi ſeghi *a* la A E eguale alla medeſima D. E fatto centro A col raggio AE ſi deſcriua il cerchio EB, che ſeghi la prima circõferen-

a prop. 3 del lib. 1.

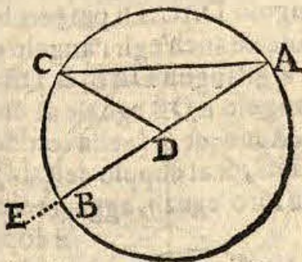
renza in B, e si congiunga la retta AB. Dico linea retta AB è quella, che si cercaua. Perche retta D è stata fatta eguale ad AE, & è la AB uale alla medesima AE (per esser raggi del cero EB). Adunque la retta AB applicata nel cerio ABC è eguale alla data retta linea D. Il che nueniua fare.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA XI.

el cerchio l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, quando anno la medesima circonferenza per base. *Euclid. 20. del 3.*

NEl cerchio ABC, il di cui ceno D, insistono sora la base BC due ngoli BDC al cen-o, & BAC alla cir-nfereza. Dico l'an-olo BDC esser dop-o dell'angolo BAC.

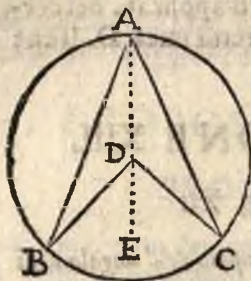


tiri la retta AD, che congiunga gl'angoli al ntro, & alla circonferenza, e si produca fino l E di sotto l'angolo al centro. E primieramen-ADE cada nella medesima retta linea AB. Nel triangolo ADC, perche l'angolo *a* esteriore DC è eguale a due angoli interiori, & opposti *a prop. 18 del lib. 1.*

A, &

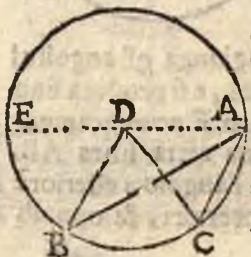
A, & C; e gl' *b* angoli A, & C sono eguali trà lo- ro, per essere i lati DA, & DC eguali, perche son raggi del cerchio. Adũque l'angolo BDC è dop- pio dell'angolo BAC alla circonferenza.

d prop. 6. del lib. 1.



Cada poi la retta ADE ò dentro dell'angolo BDC, come nella seconda figura, ò fuori come nella terza, la quale seghi la circonferen- za in E. E perche nel trian- golo CDA *c* isoscele, per essere i raggi DA, e DC e- guali trà loro, l'angolo *d* e- steriore EDC è eguale á gli angoli DAC, & DCA eguali trà loro sopra la ba- se AC, l'angolo EDC sarà eguale al doppio dell' angolo DAC. Di più perche nel triangolo ADB isoscele anch'egli l'angolo esteriore EDB è egua- le agl'angoli DAB, & DBA trà loro eguali, sarà l'angolo EDB eguale al doppio dell'angolo DA- B. Adunque se (nella seconda figura) *e* all'angolo EDC, & al doppio dell' angolo EAC, che sono frà loro eguali, aggiugneremo l'angolo EDB, & il doppio dell' angolo EAB anche frà loro eguali, sarà tutto l'angolo BDC, che è al centro, eguale al doppio dell'angolo BAC, che è alla circonferenza. Ma nella terza figura, *f* se dall'ango- lo EDC, e dal doppio dell' an-

c prop. 6. del lib. 1.
d prop. 18 del 1.
e Ass. 2. del 1.



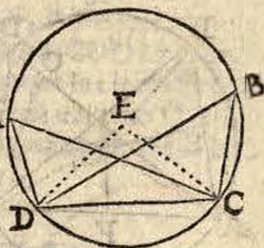
f Ass. 3. del 1.

ngolo EAC, che sono eguali tra loro, togliere-no l'angolo EDB, & il doppio dell' angolo EAB nche tra loro eguali, rimarà l'angolo BDC guale al doppio dell' angolo BAC. Adunque angolo BDC al centro è doppio dell' angolo AC alla circonferenza. Il che si doueua dimo-trare.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA XII.

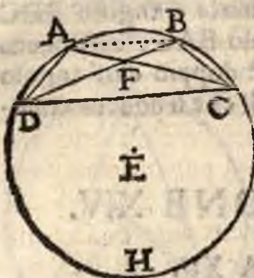
el cerchio gl' angoli, che sono in vna medesima por-zione, sono eguali trà loro. E due angoli eguali sot-tesi dalla medesima retta linea volti verso le mede-sime parti, sono nella medesima porzione del cerchio. Eucl. 21 del 3.



NEl cerchio, il di cui centro E, sie-no i due angoli A, & B ella porzione DABC. Dico che eglino sono eguali. Sia nel primo ogo la porzione mag-giore del semicerchio, e al centro E si congiun-gino le rette DE, & CE. Perche *a* l'angolo E al centro è doppio sì dell' angolo A, come dell'an-golo B alla circonferenza, auendo tutti la mede-sima circonferenza DC per base. Adunque gli an- a *prop. 13 di questo.*

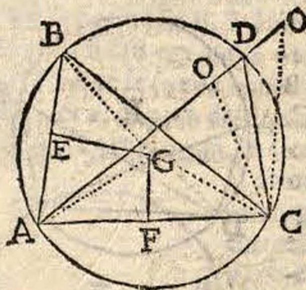
angoli A, & B sono eguali tra loro.

Sia secondariamēte la porzione DABC ò se micerchio, ouero minor del semicerchio, e si congiunga la retta AB. Manifesta cosa è, che la porzione ADHB è maggiore del semicerchio, e perciò (per la prima parte di questa proposizione) i due angoli ADB, & BCA, che sono posti nella maggior porzione, sono eguali trà loro, e sono eziandio eguali tra loro *b* i due angoli alla cima BFC, & AFD. Adunque *c* ne' triangoli ADF, & BFC il terzo angolo DAF, ò DAC sarà eguale all'angolo rimanente CBF, ò CBD.



b *Corol. della pr. 5 del lib. 1.*
c *Dalla prop. 18. del lib. 1.*

Sieno nel terzo luogo eguali tra loro i due angoli ABC, & ADC volti verso le medesime parti suttesi dalla medesima retta linea AC. E segate *d* le AB, & AC per mezo ne' punti *E*, & F si tirino *e* verso le medesime parti le rette linee EG, FG perpendicolari sopra la CA, & AB, lequali conuerranno in qualche luogo, come in G (come nella prima pro-



d *prop. 5. del 1.*
e *prop. 10 del 1.*

propoſizione di queſto libro s'è detto) e ſi cõgiungano le rette linee GC, GA, GB. *E* perche ne' triangoli GAF, GCF intorno a gl'angoli retti ad F, i lati AF, & CF ſono eguali, & GF è comune, *f* le baſi GA, & GC ſaranno eguali tra loro. Nel medeſimo modo GB ſarà eguale a GA. Laonde la circonferenza del cerchio deſcritto dal centro G, cõ il raggio GA paſſerà per i punti B, A, C. Si deue dimoſtrare adeſſo ritrouarſi il punto D nella medeſima circonferenza della porzione ABC. Se ciò non è vero, paſſi tal circonferenza, ſe è poſſibile, per il punto O, collocato nella retta AD di là, ò di qua dal punto D, ſi tiri la retta CO. *E* manifeſto nella medeſima porzione ABOC ritrouarſi i due angoli ABC, & AOC, e *g* perciò eſſere eguali tra loro. Ma l'angolo CDA per il ſuppoſto era eguale al medeſimo angolo B. Adunque i due angoli ADC, & AOC ſaranno trà loro eguali, l'eſteriore all'interiore, & oppoſto nel triangolo COD, *h* che non può eſſere. Non paſſa adunque la circonferenza del cerchio ABC di là, ò di qua dal pũto D, ſi che paſſerà preciſamente per il punto D. Il che biſognaua dimoſtrare.

f Prop. 4. del lib. 1.

g Della 1. parte di queſta.

h Corol. della pr. 18. del li. 1.

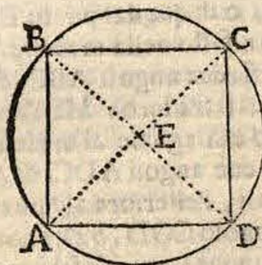


PRO-

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XIII.

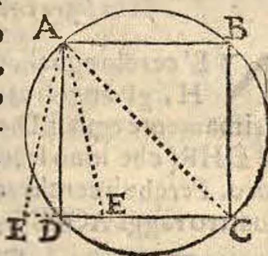
Eucl. 22. del 3. *Gl' angoli opposti de' quadrilateri descritti nel cerchio tutti gli angoli de' quali tocchino la circonferenza sono eguali à due retti. E se nel quadrilatero gl'angoli opposti saranno eguali à due retti, la circonferenza d'vn cerchio passerà per i quattro punti estremi del quadrilatero.*



NEl cerchio, il cui centro *E*, sia descritto qualsiuoglia quadrilatero ABCD, in maniera, che tutti i suoi angoli tocchino la circonferenza. Dico i due angoli opposti ABC, & ADC essere eguali à due retti. Tirati i diametri del quadrilatero AC, a prop. 14 di questo. & BD, saranno *a* i due angoli ABD, & ACD nella medesima porzione ABCD eguali trà loro. Similmente saranno ancora eguali tra loro i due angoli CBD, & CAD nella medesima porzione CBAD. Adunque i due angoli ABD, & CBD, cioè tutto l'angolo ABC sara eguale à due angoli ACD, e CAD insieme, & aggiunto comunemente l'angolo CDA, i due angoli opposti ABC & CDA insieme presi nel quadrilatero, saranno eguali

guali à tre angoli ACD, CAD, e CDA insie-
me presi; ma questi trè o'vn'triangolo sono egua-
li *b* à due retti. Adunque i due angoli opposti A b *prop*. 18
BC, e CDA sono eguali à due retti. Nel mede- *del lib*. 1.
simo modo ancora si dimostreranno eguali à due
retti i due angoli opposti BAD, & BCD. Onde
la prima parte resta prouata.

Siano secondariamente nel quadrilatero AB
CD gl'angoli opposti B, & D eguali à due retti.
Dico che la circonferē-
za del medesimo cerchio
passa per i punti A, B, C,
D. Tirato il diametro
CA del quadrilatero, in-
torno al triangolo ACB
si descriua vn cerchio
(come nel terzo caso
della passata proposi-
tione s'è fatto) il quale dico necessariamente pas-
sare per il punto D. Poiche se ciò non è vero,
passi, se può essere per il punto E di lá, ouero di
quà dal punto D nella retta linea CD, e si con-
giunga la retta AE. Perche si concede essere de-
scritto nel cerchio il quadrilatero ABCE. Adun-
que (per la prima parte di questa proposizione) i
due angoli E, & B saranno eguali à due retti: ma
saranno per la suppositione eguali à due retti gl'
angoli B, & D. Adūque questi due saranno egua-
li à quei due, e toltone comunemente l'angolo B,
l'angolo E sarà eguale all'angolo D, l'esterno all' c *Corol*.
interiore, & opposto, che è *c* impossibile. Non *prop*. 18.
G passa *del lib*. 1.



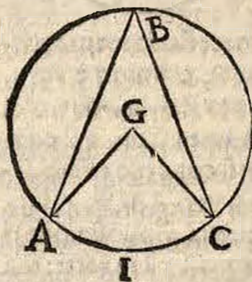
passa adunque la circonferenza del cerchio p
il punto E di là, ò di quà dal punto D, onde pa
rà per i punti A,B,C,D. Il che &c.

PROPOSIZIONE XVI.
TEOREMA XIV.

Eucl. 26. del lib. 3.

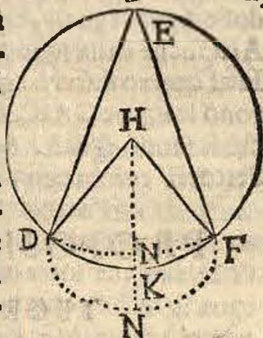
Ne' cerchi eguali, ò in vn medesimo cerchio gl' ang
eguali posti ò à i centri, ò alle circonferenze, insi
stono sopra circonferenze eguali.

NE' cerchi eguali, che abbiano i centri G,
H, gl' angoli al centro G, & DHF sie
primamente eguali. Dico le circonferenze AIC
& DHF (che sono le loro basi) essere eguali tr
loro. Perche i cerchi sono eguali. Adunque
a Ass. di questo. quattro raggi AG, CG, DH, & FH sono egua



ma si pōgono eguali gl' an
goli G, & DHF: onde
s'intenderà il cerchio AB
soprapporsi al cerchio D
F di modo, che il punto G
cada sopra il punto H, e
retta AG sopra la HD,
l'angolo G sopra l'angol
H, i due punti A, & C b ca
b Ass. 9. del lib. 1. derāno necessariamēte so
pra i punti D, & F per cagione dell' vguaglian
sì de'raggi, come degl'angoli cōpresi. Poste qu
ste cose è necessario, che la circōferēza AIC c
da precisamēte sopra la circonferenza DKF. In
per;

percioche s'ella cadesse sopra, ouero sotto, ò parte sopra, e parte sotto le, come in DNF; allora tirata dal cētro H la retta HKN, che seghi l'vna, & l'altra circonferenza ne' punti K, & N: perche KH è eguale al raggio HD, & HN è eguale all' HD, c perche sono raggi de' cerchi eguali. Adunque HK, & HN sono trà loro eguali, la parte al tutto, che è impossibile. Si che la circonferenza AIC non cade sopra, ne sotto la circonferenza DKF. Per la qual cosa è necessario, che elle s'adattino, e perciò saranno eguali trà loro. Il che nel primo luogo bisognaua dimostrare. c *Ass. di questo.*



Siano nel secōdo luogo gl'angoli alla circonferenza B & E eguali. Dico che essi insistono sopra eguali circonferenze AIC, & DKF. Si tirino i raggi AG, & GC, DH, & HF. Perche *d* l'angolo G al centro è eguale al doppio dell'angolo B, d *prop. 12 di questo.* & similmente l'angolo DHF è eguale al doppio dell'angolo E, & il doppio dell'angolo B è eguale al doppio dell'angolo E. Adunque gl'angoli G, & DHF sono eguali trà loro, e sono al centro; perciò le circonferenze AIC, & DKF sono trà loro eguali (per la prima parte di questa proposizione). Non diuersamente si dimostreranno le medesime cose in vn'istesso cerchio. Per la qual cosa se gl'angoli B, & E saranno eguali &c. Il che bisognaua &c.

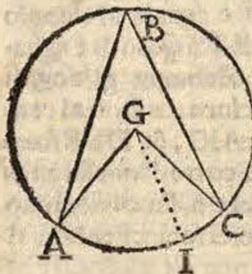
COROLLARIO.

Quindi si caua, che gl'angoli eguali al centro di due cerchi eguali, ò del medesimo cerchio insieme con le circonferenze opposte, comprendono figure eguali, e queste si chiamino Settori. Attesoche dalla suppofizione, che gl'angoli G, & H al centro fussero eguali tra loro, si dimostrarono le figure GAIC, & HDKF adattarsi, e perciò saranno eguali. Si chiamino ora tali figure Settori.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA XV.

Eucl. 27. del lib. 3. *Gl' angoli che ne i cherchi eguali, ouero nel medesimo cerchio insistono sopra eguali circonferenze, sono trà loro eguali, ò siano posti à i centri, ò alle circonferenze.*



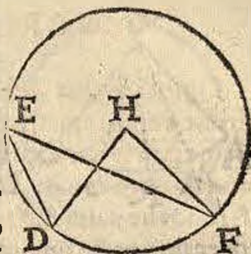
NE cerchi eguali, i centri de'quali sono G, & H, insistono primamente gl'angoli H, & AGC sopra l'eguali circonferenze AC, & DF. Dico che eglino sono eguali. Poiche se ciò non è vero, sia AGC maggiore, ò minore dell' angolo DHF

Et

et si faccia *a* l'angolo AGI eguale all'angolo H. Adũque *b* le circonferenze AI, & DF saranno eguali tra loro. Ma alla medesima circonferenza DF era eguale la circõferenza AC. Adunque le circonferenze AC, & AI sono eguali tra loro; la parte, e'l tutto, il che nõ può essere. Laonde gl'angoli AGC, & H non sono diseguali. Adunque è chiaro &c. Insistino di poi gl'angoli ABC, & E situati alla circonferenza sopra le base eguali AC, & DF. Dico che essi sono angoli eguali. Perche à cagione dell'egualita delle circonferenze AC, & DF gl'angoli a i centri G, & H sono tra loro eguali (in virtù della prima parte) ma questi sono *c* doppi degl'angoli alle circonferenze B, & E. Adunque B, & E sono eguali tra loro. La medesima dimostrazione si può adattare in vn medesimo cerchio. Il che bisognaua &c.

a prop. 24. del lib. I.

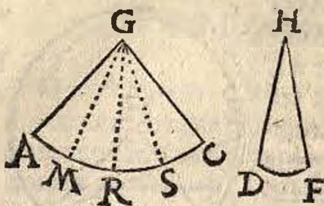
b prop. 16 di queste.



c prop. 13 di queste.

COROLLARIO.

Quindi è, che se in vn medesimo cerchio, ouero in cerchi eguali vna circonferenza sarà doppia, tripla, &c. dell'altra, e sopra loro insistamo gl'angoli al cẽtro, ouero i Settori, l'angolo maggiore sarà anche doppio, triplo, &c. del minore, si come il Settore maggiore sarà egualmente moltiplice del minore.



Impercioche se la circõferenza DF misurerà alquante volte la AC, v. g. quattro volte, e da punti dell' eguali diuisioni A, M, R, S, C al centro si congiugneranno rette linee *d* gl' angoli AGM, MGR, RGS, SGC, *e* ouero i Settori, saranno eguali si trà loro, come all'angolo, ouero Settore DHF, auuenga che insistono sopra circõferenze eguali. E perciò ancora l'angolo AGC sarà quadruplo dell'angolo H, ouero il Settore AGC sarà quadruplo del Settore DHF.

d *prop. 17 di questo.*
c *Corol. della pr. 16. di questo.*

PROPOSIZIONE XVIII.

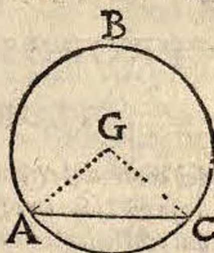
TEOREMA XVI.

Eucl. 28. e 29. del lib. 3.

Ne' cerchi eguali, ouero in vn medesimo cerchio, eguali rette linee tagliano eguali circonferenze, cioè le due maggiori saranno eguali, e le due circonferenze minori saranno trà loro eguali, & eguali circonferenze sono suttese da rette linee eguali.

NE cerchi eguali, che abbiano i centri G, & H, le applicate rette AC, & DF sieno eguali. Dico la maggior circonferenza ABC essere eguale alla maggiore DEF, e la minore AC essere eguale alla minore DF. Poiche tirati i raggi

AG,

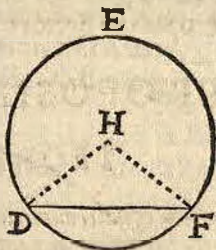


.G, GC, DH, & FH i due
iti intorno all'angolo G
aranno eguali a due lati in-
orno all'angolo H l'vno
ll'altro, per eſser raggi di
rchi eguali, e le baſe AC,
DF ſon poſte eguali. A-
unque *a* gl'angoli G, & H
aranno eguali, come anche
aranno eguali *b* le circonferenze AC, & DF, ſo-
a le quali inſiſtono. Onde le circonferenze ri-
anenti ABC, & DEF tagliate da cerchi eguali
aranno eguali tra loro. Il che douea nel primo
ogo dimoſtrarſi.

a prop. 7. del lib. 1.

b prop. 16 di queſto.

Sieno nel ſecondo luogo
circonferenze ABC, & D
F eguali, ouero ſieno egua-
le circonferenze AC, &
DF. Dico le rette AC, & DF
ſere eguali. Perche (fatta
medeſima coſtruzione) le
rconferenze AC, & DF
no eguali. Adunque *c* gl'angoli inſiſtenti G, &
ſaranno eguali, & i lati intorno à gl'angoli G,
H ſono eguali (eſsendo raggi de'cerchi eguali).
dunque *d* le baſe AC, & DF ſaranno eguali. Il
che doueaſi dimoſtrare nel ſecondo luogo. La
medeſima dimoſtrazione può ſeruire ad vn cer-
chio ſolo. Per la qual coſa &c.



c prop. 17. di queſto.

d prop. 4. del lib. 1.

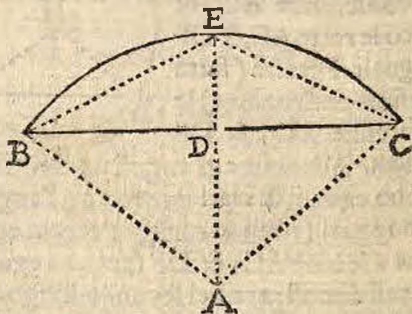
PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XVII.

Eucl. 30. del 3.

Se dal centro del cerchio ſi tireranno à i termini dell ſteſſa porzione linee rette, & vna retta linea tira dal centro ſegherà per mezo, ò l'angolo al centro ſo lamente, ò la retta linea, che ſuttende la circonſe renza, ò ſolo gl'angoli ch'ella fà alla ſuttenſa, ò pu re la circonferenza della porzione; tutte l'altre co ſaranno ſegate per mezo.

SIa la porzione del cerchio BEC, e dal ſuo cen tro A ſi tirino le rette AB, AC. E primamen te la retta ADE tirata dal centro, ſeghi per me zo l'angolo BAC. Dico tanto la retta BC, quan



to gl'angoli fatti ſopra la BC dalla retta AD, co me anche la circonferenza BC eſser ſegati pe mezo. Perche ne' triangoli ABD, ACD, into no

no a gl'angoli eguali alla sommità A, sono i raggi AB, AC eguali, & AD commune. Adunque *a* le base BD, CD sono eguali, & eziandio eguali sono gl'angoli BDA, CDA. In oltre perche gl'angoli al centro BAE, CAE insistono alle circonferenze BE, & CE. Adunque *b* queste circonferenze sono eguali tra loro.

a prop. 4. del lib. 1.

b prop. 16 di questo.

Secondariamente la retta AE seghi per mezo la sottesa BC nel punto D. Dico tutte l'altre cose esser vere. Perche ne' triangoli BAD, CAD i lati CA, BA sono eguali, & è AD lato commune, & le base BD, CD si son poste eguali. Adunque *c* gl'angoli BAD, CAD saranno eguali. Ma quando l'angolo al cētro A è segato per mezo (in virtù della prima parte di questa proposizione) ancora gl'angoli al punto D sono eguali, come anche le circonferenze BE, EC. Adunque quando BC è segata per mezo, tutte l'altre cose son vere.

c prop. 7. del lib. 1.

Nel terzo luogo la AD faccia sopra la BD gl'angoli BDA, CDA eguali. Dico tutte l'altre cose esser vere. Perche la retta AD tirata dal centro sopra l'altra retta BC, la sega ad angoli eguali, ouero retti. Adunque *d* la BC è segata per mezo in D. Ma (per cagione della seconda parte di questa proposizione) quando la BC è segata per mezo, sono eziandio tutte l'altre cose segate per mezo. Adunque se gl'angoli al punto D son segati per mezo, saranno per mezo segate ancora l'altre cose.

d prop. 2. di questo.

Vltimamente la retta AE seghi per mezo la circonferenza BC nel punto E. Dico tutte l'altre

cose

cose esser vere. Perche le circonferenze BE, CE

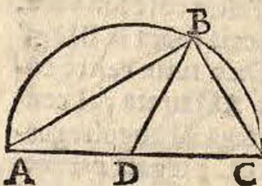
e Prop. 17 di questo. si pongono eguali. Adunque e gl'angoli al centro, à loro insistenti sono eguali, e (per la prima parte di questa) la retta BC è segata per mezo, e gl'angoli BDA, CDA sono eguali. Per questo &c.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XVIII.

Euclid. 31. del 3.

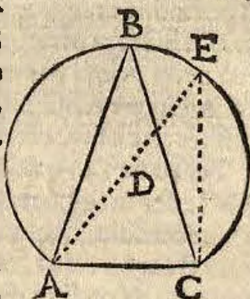
L'angolo nel semicerchio è retto: quello che è nella maggior porzione è acuto, e quello che è nella minore è ottuso. E intorno all'angolo retto la portione è semicerchio; intorno all' angolo acuto è maggior porzione, e finalmente intorno all'angolo ottuso è porzione minore.



NElla portione del cerchio ABC sia l'angolo ABC Dico egli esser retto nel semicerchio, acuto nella maggior portione, e ottuso nella porziore minore. Si tiri nel semicerchio il raggio DB, e nell'altre porzioni tirisi il diametro AE, e la retta linea CE. Perche nel semicerchio il triangolo ABD a i due lati AD, BD

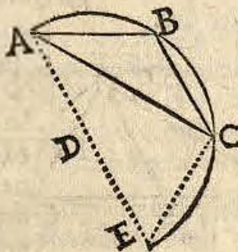
a Prop. 6. del lib. 1. eguali, per esser raggi del cerchio; *a* Adunque gli angoli BAD, & ABD sono eguali tra loro. Per la medesima ragione nel triangolo BDC iscescele, i due angoli BCD, & CBD sopra della base saranno

nno eguali tra loro. Adũ-
e i due angoli BAC, & B
A insieme presi, saranno
uali a due angoli ABD,
CBD, cioè all'intero an-
lo ABC; ma *b* sono i
angoli del triangolo A
eguali a due retti. Adũ-
e l'angolo ABC sarà la
ta di due retti, e pero sa-
retto.



b *prop. 18 del 1.*

Ma nell'altre porzioni, perche AE è diame-
o sara ACE semicerchio, & in esso l'angolo A
E sarà retto (come dinanzi si dimostrò). Adun-
e *c* l'angolo E sarà acu-
, tanto nella maggiore,
e nella minor portione.
ono *d* gl'angoli E, & B
uali posti nella medesi-
portione maggiore.
unque l'angolo B è acu-
nella porzione maggio-
Ma nella porzione mi-
re *e* i due angoli E, & B
posti nel quadrilatero ABCE descritto nel
chio sono eguali a due retti, & era l'angolo E
to. Adunque l'angolo B sarà ottuso nella mi-
portione.



c *Dalla prop. 18. del lib. 1.*

d *prop. 14 di questo.*

e *prop. 15. di questo.*

ia secondariamente l'angolo ABC retto co-
ito nella porzione EABC. Dico esser egli
icerchio. Impercioche, se ciò non è vero, sa-

rà

rà porzione maggiore, ò minore, e perciò l'an-
golo ABC sarà ottuso, ouero acuto (come si mo-
strò nella prima parte) il che è contro il suppo-
sto. Adunque ABC non è porzione maggiore, ò
minore; si che sarà semicerchio.

Terzo sia l'angolo B acuto. Dico la porzione
ABC esser maggiore. Che se ciò non è vero, sarà
ò semicerchio, ò minor porzione, e perciò l'an-
golo B sarà ò retto, ò ottuso. Il che è contro al
supposto. Non sarà dunque &c.

Sia nell'vltimo luogo l'angolo B ottuso. Dico
la porzione ABC esser minore. Poiche, se que-
sto non è vero, sarà ò semicerchio, ò maggiore
porzione, e però l'angolo B sarà retto, ouero
acuto, la qual cosa ripugna al supposto. Per il-
che &c.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XIX.

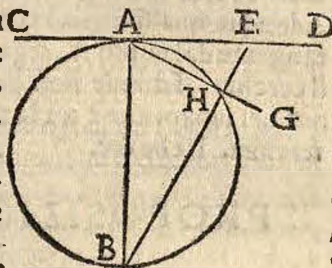
Eucl. 16. del lib. 3.

Nel cerchio la retta linea tirata perpendicolarmente sopra al diametro dall'estremo termine di esso, cade rà fuori del cerchio, e nel luogo, che è trà la stessa retta linea tangente il cerchio, e la circonferenza non caderà alcuna altra linea retta.

NEl cerchio ABH, il cui diametro sia AB, si tiri dall'estremo suo punto A la retta a CA
a prop. 10 del lib. 1.
D perpendicolare alla retta AB. Dico che la
CAD cade fuori del cerchio, e che il luogo, che
trà

rà la tangente DA, e la circonferenza non è capace d'vn'altra retta linea. Da qualsiuoglia punto E preso nella retta AD, si tiri all'altro estremo del diametro B la retta linea EB, che seghi la circonferenza nel punto H. E perche la massima delle rette linee *b* BA, BH applicate nel cerchio è il diametro BA. Adunque la retta linea BA è maggiore della BH. E perche nel triangolo BAE l'angolo BAE è retto adunque l'altro angolo *c* AEB è acuto, e perciò minore del retto. Laonde il lato BE sottesso all'angolo maggiore, sarà maggiore del lato BA: ma BA era maggiore di BH. Adunque BE sarà maggiore di BH; & il punto H è nella circonferenza del cercio; e perciò il punto E caderà fuori del cerchio, e così qualsiuoglia altro punto della retta AD, eccettuato il punto A. Adunque tutta la retta linea AD cade fuori del cerchio.

b prop. 11 di questo.



c Della prop. 18. del lib. 1.
d prop. 20 del lib. 1.

Poi dal punto del contatto A si tiri qualsiuoglia retta linea AG tra la tangente, & il diametro BA. E si faccia *e* l'angolo ABH eguale all'angolo DAG. Perche i due angoli ABH, & DAG sono eguali, aggiunto comunemente l'angolo BAH, i due angoli HBA, & BAH insieme presi saranno eguali à i due angoli BAG, & GAD, i qua-

e prop. 24 del lib. 1.

quali costituiscono l'angolo retto BAD. Adunque quelli due angoli sono eguali ad vn' angolo retto, e perciò le rette linee *f* BH, AH concorrono; e fanno *g* l'altro angolo AHB retto, il quale *h* sarà nel semicerchio; e per questo la retta GA sega il cerchio ne' punti H, & A. Per la qual cosa la retta linea HA *i* cade dentro il cerchio. Adunque qualsiuoglia retta linea tirata sotto la tangente dal punto A, segherà necessariamente il cerchio. Laonde non può tirarsi vna retta linea nel luogo, che è trà la tangente, e la circonferenza. Il che &c.

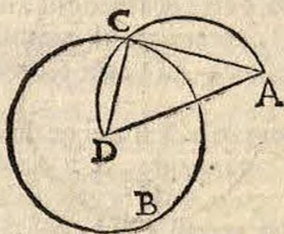
f Prop. 29 del lib. 1.
g Dalla prop. 18. del lib. 1.
h prop. 20 di questo.
i prop. 4. di questo.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA III.

Da vn dato punto posto fuori del cerchio, tirare vna retta linea, che tocchi il dato cerchio.

Eucl. 17. del lib. 3.



DAl punto esteriore A dee tirarsi vna retta linea, che tocchi il cerchio BC, il di cui centro sia D. Si tiri la retta AD, sopra la quale si descriua il semicerchio ACD, che seghi la circonferenza del cerchio BC nel punto C, e si congiunga la retta linea AC. Dico che

che AC tocca il cerchio BC nel punto C. Si congiunga la retta linea DC. Perche *a* l'angolo ACD nel semicerchio è retto. Adunque la CA perpendicolare al semidiametro DC, tirata dal suo estremo C, *b* toccherá necessariamente il cerchio BC in C. Il che bisognaua fare.

a prop.20 di questo.

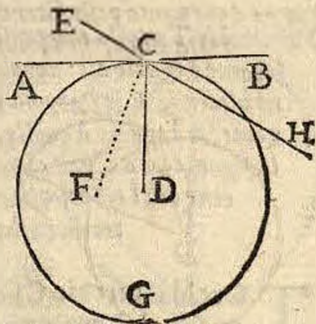
b prop.21 di questo.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA XX.

Se vna retta linea toccherà il cerchio, quella che è tirata dal centro al contatto sarà perpendicolare alla tangente. E se si eleuerà vna perpendicolare alla tangente dal punto del contatto, ella passerà per il centro del cerchio.

Eucl. 18. & 19 del lib. 3.



TOcchi la retta AB nel punto il cerchio CG, il cui centro sia D, e congiunga la retta CD. Dico primamente la retta CD essere perpendicolare alla AB. Se questo è falso, si tiri dal punto C sopra CD la perpendicolare EH. E manifesto, che la retta EH tocca il cerchio, e perciò *c* AB segherà il cerchio, il che è contro il supposto. La-

a prop.10 del 1.

b prop.21 di questo.

c prop.21 di questo.

Laonde non è possibile, che CD non sia perpendicolare alla AB. Il che douea prima dimostrarsi.

Sia secondariamente la CD perpendicolare alla tangente AB in C punto del suo contatto. Dico che 'l centro del cerchio si ritroua nella CD. Perche se ciò è falso, sia F il centro del cerchio situato fuori della linea CD, e si congiunga la FC. Adunque per la prima parte di questa proposizione FC sarà perpendicolare sopra la AB. Laonde i due angoli FCB, & DCB saranno retti, e perciò eguali, la parte, e'l tutto, il che è impossibile. Non può adunque ritrouarsi il centro F fuori della linea CD. Per la qual cosa &c.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XXI.

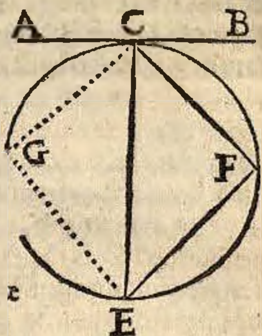
Eucl. 23. del 3.

Nel cerchio l'angolo compreso dalla tangente, e dalla segante è eguale all' angolo constituito nella porzione alterna. E se l'angolo situato nell' alterna porzione sarà eguale à quello, il quale è contenuto dalla segante, e da vn' altra cadente nella circonferenza del cerchio, la cadente retta linea toccherà il cerchio.

TOcchi il cerchio CGE la retta AB nel punto C, dal quale primamente si tiri per centro la retta CE. Dico l'angolo ACE essere eguale all' angolo F nella porzione alterna, e l'angolo BCE essere eguale all' angolo CG

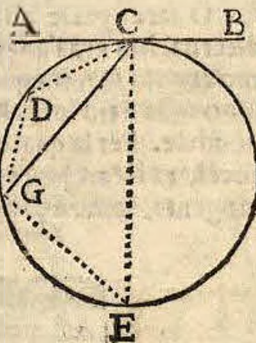
Per-

erche *a* l'vno, e l'altro ngolo ACE, & BCE è etto; e sono eziandio *b* etti ne' semicerchi gl'angoli F, & CGE. Adunque angolo ACE è eguale all'angolo F, & all'angolo GE è eguale l'angolo CE.



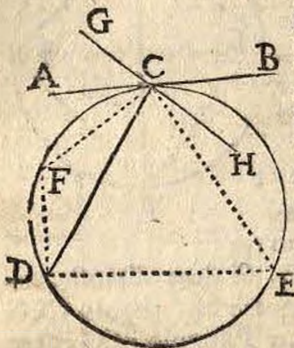
a prop.23. di questo.
b prop.20 di questo.

Passi secondariamente la retta CG nō per il centro, e si tiri il diametro E, e si congiunga la GE. Si deue dimostrare angolo ACG essere eguale all'angolo CEG ell'alterna porzione, e l'angolo BCG essere guale all'angolo D. Perche nel semicerchio *c* angolo CGE è retto. Adunque *d* nel triangolo CGE gl'altri due angoli GEC, & GCE saranno eguali ad vn sol retto, cioè *e* sono eguali all'angolo retto ACE. Toltone adunque comunemente l'angolo GCE, sarà l'angolo ACG eguale all'angolo CEG nella porzione alterna. Dopoi perche nel quadrilatero *f* CDGE, i due angoli opposti D, & E sono eguali à due retti, e sono eziādio *g* eguali a due retti i due angoli ACG, & BCG;



c prop.20. di questo.
d Dalla prop.18. del lib I. e prop.23. di questo.
f prop.15. di questo.
g prop.12 del 1.

& BCG; ed erano gl'angoli ACG,& E eguali tr[a] loro. Adunque gl'angoli rimanenti BCG,& D saranno tra loro eguali.



Nel terzo luogo da[l] medesimo punto C del[la] la circonferenza CDE si tirino le rette line[e] CD, che seghi il cer[-] chio, & AB, che vi cad[a] sopra, e sia l'angolo A[-] CD eguale all'angol[o] E nella porzione alter[-] na. Dico che AB tocc[a] il cerchio. Impercio[c-] che, se ciò non è vero, [si] tiri la *h* GH, che toc[-] chi il cerchio nel punto C. Adunque l'angolo GCD sarà eguale all'angolo E nella porzion[e] alterna. Ma era l'angolo ACD eguale al medesi[-] mo angolo E. Adunque gl'angoli ACD, & GCD sono egua li tra loro, la parte, e'l tutto, che è im[-] possibile. Per la qual cosa niuna altra retta G[H] toccherà il cerchio, e però la AB solamente far[à] tangente, come si propose.

h prop.21 di questo.
i Dalla 2. parte di questa propositione.



PRO-

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA IV.

[S]opra vna data retta linea descriuere vna portione di cerchio, la quale sia capace d' vn' angolo eguale ad vn' angolo dato. *Eucl. 33 del lib. 3.*

[S]Opra la data retta AB si deue descriuere la porzione d' vn cerchio, [c]he sia capace d' vn' an[g]olo eguale al dato ango[l]oC. Si faccia *a* l'angolo [D]AB eguale all' angolo [C], e se AB è perpendico[l]are sopra la AD, ella si [se]ghi *b* per mezo nel pun[t]o E. Ma se non è perpen[d]icolare, si *c* eleui AE per[p]endicolare sopra la AD, [l']angolo EAB sarà acuto, [a]uengache egl' è la diffe[r]enza dell' angolo BAD [d]al retto. E si faccia l'an[g]olo *d* ABE eguale all'an[g]olo BAE acuto. Adun[q]ue *e* AE, & BE concor[r]eranno nel punto E, e sa[r]anno *f* eguali tra loro. Si

a prop. 24 del lib. 1.

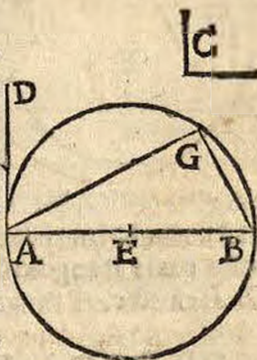
b prop. 9. del 1.

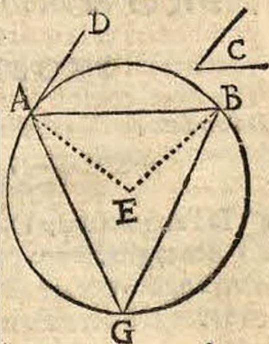
c prop. 10. del lib. 1.

d prop. 14 del lib. 1.

e Prop. 29 del lib. 1.

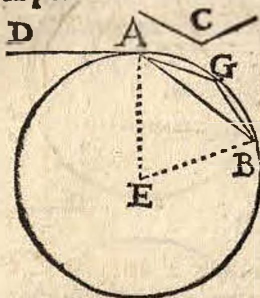
f prop. 20. del 1.





che il cercchio descritto co'l far cẽtro E, & inter- uallo AE, passerà per il pũto B, e sarà tocco g dal- la retta DA, per essere ella perpẽdicolare al rag- gio AE. Si tirino da qualsiuoglia punto G del- la portione AGB due rette linee GA, & GB. De- dimostrarsi l'angolo AGB costituito nella data por- zione essere eguale al dato angolo C. Perche all'an- golo DAB h compreso dal- la tangente, e segante, è eguale l'angolo G nella porzione alterna; ed era eguale al medesimo ango- lo DAB l'angolo C. Adun- que gl'angoli G, & C sono eguali tra loro. Per la qual cosa abbiamo descritto la portione AGB nella quale l'angolo G è eguale al dato angolo C. Il che &c.

g prop. 21 di questo.



h prop. 24 di questo.

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA V.

Eucl. 34. del lib. 3.

Da vn dato cerchio tagliare vna porzione capace d'vn angolo eguale ad vn angolo dato.

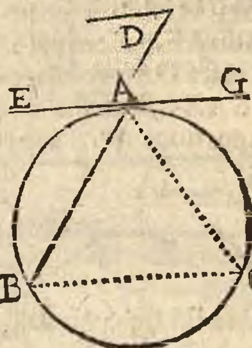
SIa l'angolo dato D, & il cerchio ABG, da cui dee tagliarsi vna porzione, che sia capace d'vn'angolo eguale all' angolo D. Si tiri a EG, che tocchi il cerchio nel punto A; Si faccia do- poi

a prop. 21. di questo.

oi *b* l'angolo EAB eguale all'angolo D, e da qualsiuoglia pũto C della circonferenza ACB, tirino due rette linee A, & CB. Dee dimostrarsi l'angolo C essere guale all'angolo D. Perche *c* nell'alterna porzione l'angolo C è guale all'angolo EAB, & al medesimo angolo EAB è eguale l'angolo D per la costruzione. Adunque l'angolo C è guale all'angolo D. Abbiamo adunque segata la porzione ACB, nella quale l'angolo C è eguale al dato angolo D. Il che conueniua fare &c.

b *prop.24 del lib.1.*

c *prop.24 di questo.*



PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XXII.

Se saranno due rette linee diseguali, e dalla maggiore se ne tolga via la metà, e se ne leui di nuouo dalla rimanente vn'altra metà, e questo si reiteri sempre, rimarà finalmente vna linea, che sarà minore della minor proposta linea.

Euclid. 1. del lib. 10.

Sieno le duē rette linee AB maggiore, e C minore. Dico che se dalla maggiore, e da gl'auanzi suoi si leueranno via mai sempre le metà,

rimarrá finalmente vna linea minore della C. S
moltiplichi la C tante volte, che ne vêga la DH
maggiore della AB, e si distribuisca la DH nell
sue parti DE, EF, FG, & GH eguali alla medesima C.
Si leui dopoi dalla AB la sua metà AK, e dalla rimanente KB si leui

A K M N B
C
D E F G H

a prop. 9. del lib. 1.

eziandio la sua metà KM, e ciò si reiteri sempre finche le parti AK, KM, MN, & NB segate nel la medesima AB diuengono tante in numero quante sono le parti dell'altra DH: il che certa cosa è potersi fare; potendosi la quantita continua mai sempre diuidere. Dee dimostrarsi l'estrema portione NB esser minore della retta linea C. Perche dalla minore AB se ne leua la sua metà AK, e dalla maggiore DH se ne leua il pezzo DE minore della sua meta; sarà la rimanente KB minore della residua EH. E perche di nuouo dalla minore KB se ne leua la sua metà KM, ma dalla maggiore EH se ne leua il pezzo EF non maggiore della sua metà. Adunque la rimanente MB sarà minore della rimanente FH. Si leua in fine dalla minore MB la sua meta MN, e dalla maggiore FH si leua via FG non maggiore della sua metà, e cosi sempre. Vna volta adunque l'vltimo auãzo NB sara minore di GH, ouero di C, che l'è eguale. Che è quello che si cercaua.

PRO-

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA VI.

Nel triangolo isoscele rettangolo la differenza del lato, dell'Ippotenusa è minore della metà del lato, la quale si può di nuouo segare in maniera, che la sua minor porzione sia eguale alla differenza delle porzioni precedenti; e così sempre, finche l'estrema porzione sia minore di qualunque data retta linea.

Sia il triangolo Isoscele ABC rettangolo in B, e la retta linea D sia di qualsiuoglia piccolezza. Dee dimostrarsi la differenza dell'ippotenusa AC, e del lato BC esser minore della metà di AB, e potersi la medesima differenza segare come si cerca. L'angolo ACB *a* si diuida in mezo dalla retta linea CF, la quale seghi la retta AB in F, e dal *b* punto F si tiri la perpendicolare FE alla AC, che la seghi in E, e si distenda *c* la retta FG parallela alla medesima AC, che seghi BC in G. E perche a cagione delle parallele *d* l'angolo BGF è eguale all'angolo C, e l'angolo BFG eguale all'angolo A, e *e* gl'angoli A, & C sono egua-

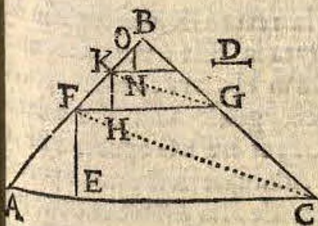
a prop. 8. del lib. 1.

b prop. 11 del lib. 1.

c Corol. prop. 17. del lib. 1.

d prop. 15 del lib. 1.

e prop. 6. del lib. 1.



eguali alla base dell'isoscele ABC. Adunque sono
eguali ancora gl'angoli BFG, e BGF, e *f* perciò
lati BG, GF sono eguali, e'l triangolo BFG è iso-
scele. Di più perche ne' triangoli CEF, e CBF
l'angolo BCF è stato fatto eguale all'angolo EC
F, e eguali sono i due angoli retti B, & E, e'l lato
CF opposto a gl'angoli retti B, & E è commune.
Adūque *g* CB è eguale à CE, e BF è eguale a EF,
però AE sarà la differenza del lato BC, e dell'ip-
potenusa AC. Ed essendo ne' triangoli FBG, &
FEA i due angoli B, & E retti, e gl'angoli BGF
& A eguali, a quali sono opposti i lati eguali FB
& FE. Adunque *h* AF è eguale ad FG, & AE
eguale a GB, ouero ad FB a lui eguale. Et è ne'
triangolo AEF il lato AF (opposto all'angolo
retto, e perciò *i* al massimo AEF) maggiore di
AE. Adunque AF è maggiore di FB. Laonde la
minor porzione BF è eguale ad EA differenza
del lato BC, e dell'ippotenusa AC del medesimo
triangolo ABC.

Tirata in oltre *k* la retta GK, che seghi in mez-
zo l'angolo G, e tirata la KH *l* perpendicolare
alla FG, che la seghi in H, sarà, come sopra, la
minor porzione KB eguale ad FH differenza
delle stesse BG, & GF; & era BG eguale a BF, &
FG eguale ad AF. Adunque KB minor porzio-
ne di tutta la FB è eguale alla differēza delle pre-
cedenti porzioni AF, & FB. E perche il continuo
è mai sempre diuisibile, potrà di nuouo segarsi
KB in O, in maniera che BO sia la minor por-
zione, e sia eguale alla differenza delle porzio-
ni

f prop. 20. del lib. 1.

g prop. 25 del 1.

h prop. 25 del 1.

i prop. 20. del 1.

k prop. 8. del 1.

l prop. 11. del 1.

FK, KB, e così sempre. Ed essendo due rette linee AB, & D, e dalla maggiore AB tagliandosene maggior porzione, cioè più della sua metà, e dall'auanzo FB tagliandosene FK più della sua metà, e dalla KB tagliandosene similmente KO più della sua metà, e così mai sempre. Adunque *m* l'vltima porzione OB sarà minore di qualunque data retta linea D. E tutte le minori porzioni tagliate sono differenze delle precedenti porzioni. Onde il problema si è fatto. *m prop.27 di questo.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA XXIII.

Eucl.116 del lib.10

Nessuna retta linea, che misuri il lato del quadrato, può misurare il diametro di detto quadrato. Si chiamino il lato, & il diametro del quadrato, linee rette incommensurabili trà loro.

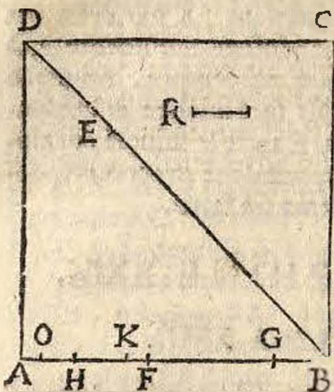
SIa il quadrato ABCD, il di cui diametro BD, e la retta linea R misuri il lato AB dello stesso quadrato AC, e sia R qualsiuoglia retta linea delle innumerabili, che possono misurare la medesima AB. Dico che la retta R non mai misura il diametro BD. Impercioche, se ciò non è vero, la retta R misuri ancora il diametro BD. E perche nel quadrato *a* AC l'angolo A è retto, & i due lati DA, & AB sono eguali, il triangolo BAD isoscele sarà rettangolo. Laonde *b* fatta la BE eguale alla AB, & AF segata eguale alla DE differenza del lato AB, e dell'ippotenusa BD, sarà

a prop.34. del 1.

b prop. 3. del 1.

la

c prop. 28 di questo. c la AF meno della metà, cioè sarà porzione minore di AB. E di nuouo fatta FG eguale alla AF e legata la AH eguale alla GB, che è la differenza delle porzioni AF, FB, sarà anco la AH minor porzione di AF. E di capo fatto HK eguale alla HA, e legata AO eguale alla KF differenza delle porzioni AH, & HF, sarà parimēte AO minor porzione di AH. E questo potrà mai sempre farsi, fin che l'vltima porzione, la quale sia AO, diuenga minore di qualunque data retta linea R. E perche la retta R si pone misura di AB, e dell'altra DB, e de la EB eguale ad AB. Adunque la retta R misura tutta la DB, e la sottratta BE. Laonde la retta d R misurerá ancora la rimanente differēza DE, & è AF eguale a DE. Adunque R misura la stessa AF, e prima misuraua tutta la AB. Adunque la e medesima R misurerá la rimamente FB, & anco la stessa AF, e perciò ancora misurerá la loro differēza GB, ò AH (eguale alla GB) ma misuraua la medesima R eziandio la AF. Adunque misurerá ancora la rimanente HF; e misuraua parimente la AH. Laonde la R misura la loro differenza KF, e perciò



d Ass. 6. del lib. 1.

e Ass. 6. del 1.

la

a AO a lei eguale. Per la qualcosa la retta f R sa- [t Diff. 13. del 1.]
a eguale, ò minore di AO (poiche la maggiore
on può misurare la minore) la qual cosa è im-
ossibile. Attesoche la retta AO si fece minore
ella R. Si che non si può ritrouare alcuna retta
nea R per piccola che sia, la quale misuri il dia-
etro BD, & il lato AB del medesimo quadrato
C. Il che &c. Si chiamino le rette linee AB, &
DB incommensurabili tra loro.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA XXIV.

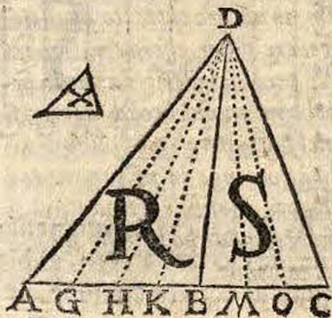
e saranno due rette linee incommensurabili, gli spazi parallelogrammi, ouero i triangoli sopra loro descritti egualmente alti saranno incommensurabili trà loro.





Sieno due rette linee AB, & BC incommensurabili, le quali sieno basi de' parallelogrammi, ouero de triangoli R, & S, che abbino la medesima altezza. Dico i parallelogrāmi, ouero i triangoli R, & S essere incommensurabili tra loro. Poiche, se ciò non è vero, abbiano gli spazi R, & S qualche misura comune, se è pos-

possibile, la quale si ponga essere X, e quante vol-
a prop. 28 del lib. 1. te X misura lo spazio R in tante parti *a* egual
tra loro AG, GH, HK, KB si scompartisca la
retta linea AB: e quante volte X misura lo spa-
zio S, in tante parti eguali BM, MO, OC si distri-
buisca la retta BC, e da i punti G, H, K, M, O si
b Corol. prop. 16. del lib. 1. tirino *b* parallele, che facciano parallelogram-
mi nel primo caso, ò concorrendo nel medesimo
punto D facciano triangoli, come nel secondo
c prop. 30 del 1. caso; *c* i parallelogrammi AGD, GHD, HKD,
d prop. 31 del 1. KBD, ouero *d* i triangoli sarãno eguali trà loro
auuenga che le basi loro sono eguali, e sono tra
le medesime parallele. Et eziandio i parallelo-
grammi COD, OMD, MBD, ouero triangoli
saranno trà loro eguali. E perche X tante volte
misura lo spazio R, quante volte la KB misura
la base BA; e quante volte la KB misura la base
BA, tante volte lo spazio KBD misura lo spazio
R (comparando sempre i parallelogrammi trà
di loro, ouero i triangoli trà di loro). Adunque
la X, e lo spazio
KBD misurano e-
gualmente lo spa-
zio R; e perciò gli
spazi X, & KBD
sono eguali tra lo-
ro, essendo eguali
à qualsiuoglia par-
te di quelle, nelle
quali si risolue lo
spazio R. Per la
me-



desima ragione lo spazio MDB sarà eguale
o spazio X. Laonde i due spazi KBD,& MDB
anno eguali trà loro, essendo amendue eguali
nedesimo spazio X, e sono della medesima al-
za. Adunque le lor base KB, & BM sono trà
o eguali (impercioche se elleno fossero dise-
ali, sarebbero eziandio diseguali i e parallelo- e Dalla
ammi, ouero f i triãgoli KBD,& MBD,la qual prop. 31.
a è contra l'ippotesi): ma la KB misura la del 1.
, e la BM misura la BC. Adunque le due rette f Dalla
, & BC sono trà loro commensurabili, essen- prop. 31.
misurate dall'eguali KB, & BM, ouero dalla del 1.
desima KB, che è contra il supposto: atteso-
furono poste AB, & BC incommensurabili.
on possono adunque gli spazi R, & S auere al-
na misura comune, e perciò sono incommen-
abili. Il che &c.

SCOLIO.

*icome si è dimostrato le linee rette, e gli spazi, ò
ngoli, ò parallelogrammi potere essere incommen-
bili, così dimostreremmo ancora tutte le quantità
inue del medesimo genere poter essere trà loro in-
mensurabili. Deuono però escludersi da questo or-
i numeri; auuengache ne' numeri col diuidere, si
arriuare al minimo nel suo genere, cioè all' vnità
ma ciò nella quantità continua in nessun modo è
bile, perche è mai sempre diuisibile: e così nel di
enere non si dà minimo, il quale possa esser misura
une di due quantitadi continue.*

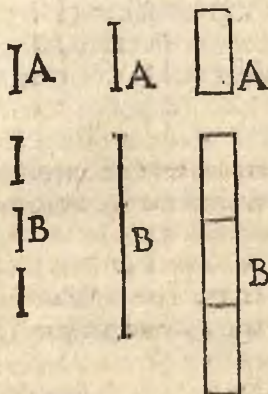
Fine del Libro secondo.

LI-

LIBRO TERZO

Delle comparazioni delle quantità.

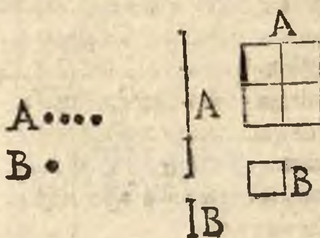
DIFFINIZIONI.



I.

LA minor quanti
si dice parte dell
quantità maggiore
quando la minore m
sura alcune volte la
maggiore.

II.

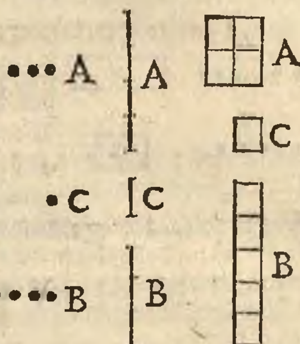


Ma la maggio
quantità si dice
moltiplice dell
minor quantità
quādo la maggio
re è misurata dal
minore.

La

III.

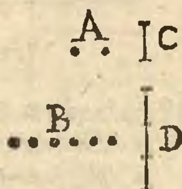
a quantità mag-
e, ouero minore
te parti d'vn'al-
quantità, quando
ritrouarsi vna
a quantità, che sia
misura comune.



n due quantità del medesimo genere, se la ma A misura la seconda B, chiamerò la ma parte della seconda denominata dal numero e parti contenute in essa, come vn mezo, vn terzo . E se la prima A sarà misurata dalla seconda B, A esser moltiplice di B, come doppia, tripla, &c. se la prima A, e la seconda B saranno misurate da terza C, chiamerò A parti di B, come tre quarti, attro terzi &c.

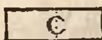
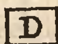
IV.

Medesima parte si chiama la prima quantità della onda, e la terza della rta, quãdo la prima mi tante volte la seconda, nte la terza misura la rta.



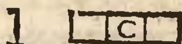
Et

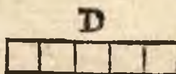
V.

Et egualmente moltipl[...] ce vien detta la prima qua[...] tità della seconda, come la terza della quarta, quan[...] do la prima, e la terza ve[...] gono dalla seconda, e dal[...] quarta misurate egualmente.

V I.





Sì dice medesime part[...] prima quantità della seco[...] da, si come la terza, e par[...] della quarta quantità, qua[...] do due qualunque quanti[...] misurano egualmẽte la pr[...] ma, e la terza, e misura[...] eziandio egualmente la [...] conda, e la quarta.

Di quattro quantità (ò si[...] no le due prime del medesim[...] genere con le seconde, ò nò) la prima A tante volte misu[...] la seconda B, quante la ter[...] C misura la quarta D. Dirò la prima della seconda [...] la terza della quarta esser la medesima parte. E se [...] A tante volte sarà misurata da B, quante volte la [...] misurata da D. Dirò la prima, e la terza essere e[...]

mol-

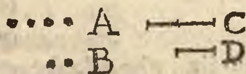
tiplici della seconda, e della quarta. Ma se A, &
ranno egualmente misurate dalle G, & H, e pari-
ite le B, & D saranno egualmente misurate dalle
e G & H. Dirò la A della B, & la C della D esser
nedesime parti.

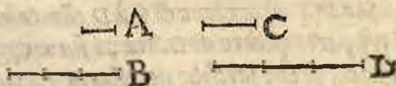
V I I.

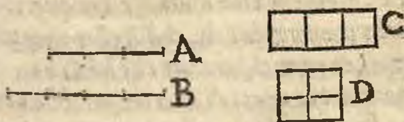
Se vna antecedente quantità sarà moltiplice, ò
arte, ò parti d'vna quantita conseguente. Si
ami la comparazione della prima, con la se-
nda proporzione commensurabile. E si dirà
er la prima alla seconda proporzione com-
ensurabile. E se niuna altra quantita, che abbia
mmensurabile proporzione alla conseguente,
ò essere eguale all'antecedēte, ma è mai sēpre
ggiore, ò minore di quella si dira l'anteceden-
auere alla conseguente proporzione incom-
ensurabile.

V I I I.

Dirò vna
oporzio-
commē-
abile es-
e la me-
sima, che
' altra
oporzio-
quando
rimo ter
ne del se-
ndo, ed il



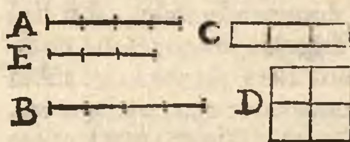


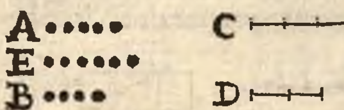


terzo del quarto saranno equimoltiplici, ò la medesima parte, ò pure le medesime parti: e tali quantità si diranno proporzionali commensurabili.

I X.

Chiamo la proporzione della prima alla seconda maggiore della proporzione commensurabile, che ha la terza alla quarta, quando la prima auanza quella, la quale alla seconda stà come la terza alla quarta. E dirò la proporzione della prima alla seconda esser minore della proporzione cõmensurabile, che hà la terza alla quarta, quando la prima è minore di quella, che alla seconda stà come la terza alla quarta.





Sia la proporzione di C à D cõmensurabili, v. g. sia C tre parti quarte di D. Mà A sia maggiore di tre quarti di B, sì che sarebbe necessario scemare qualche cosa da A, acciò che ella diuenisse tre quarti di B. Allora dirò la proporzione di A à B esser maggiore della proporzione commensurabile che hà C à D. Se poi A sarà minore di tre quati di B, cioè sarebbe necessario accrescere la A, acciòche ella diuenisse tre quarti di B, allora

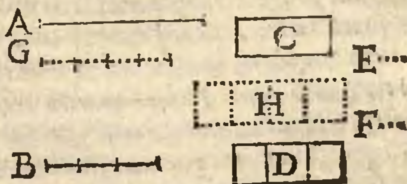
dirò la proporzione di *A* à B esser minore della proporzione commensurabile, che hà C à D.

X.

E chiamerò vna proporzione maggiore d'vn'altra incommensurabile proporzione; quando la prima proporzione è maggiore, ma la seconda proporzione è minore d'vna medesima terza proporzione commensurabile.

X I.

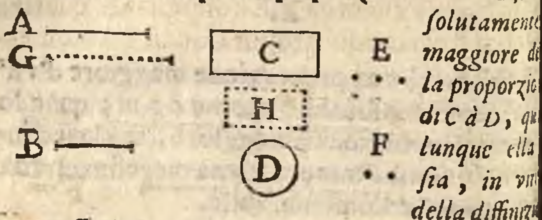
Ma vna proporzione sarà minore d'vn'altra incōmensurabile, quando



la prima proporzione sarà minore, ma la seconda proporzione sarà maggiore della medesima terza proporzione commensurabile.

Sia la C incommensurabile à D, se egli è vero, che delle innumerabili proporzioni commensurabili se ne troui pur vna, quale è quella di E ad F di tal condizione, che la proporzione di A à B sia maggiore di quella di E ad F, ma la proporzione di C à D sia minore di quella stessa, che hà E ad F; cioè sendo v.g. E quattro terzi di F, se egli è vero che A sia maggiore di quattro terzi di B, ma C sia minore di quattro terzi di D. Al-

loru dirò la proporzione della A à B esser maggior dell' incommensurabile proporzione che hà C à D, concedendo, che la prima proporzione di A à B sia assolutamente maggiore della proporzione di C à D, qualunque ella sia, in virtù della diffinizione, necessariamente la proporzione di A à B dourà esser maggiore, ma la proporzione di C à D non sarà d'vna terza proporzione commensurabile qualunque ella si sia; ponghiamo esser quella di E ad F, cioè sia come quattro à tre. Dourà dunque A esser maggiore di quattro terzi di B, ma la C non sarà maggiore di quattro terzi di D, cioè C ò sarà quattro terzi, ò meno di quattro terzi di D. Dal che ne siegue, che vi sarà in natura qualche quantità minore della prima A, quale è v.g. G, che sarà quattro terzi di B, e vi sarà parimente in natura qualche quantità non minore di C, cioè eguale, ò maggiore di essa C, quale è v.g. H, la quale sia quattro terzi di D.



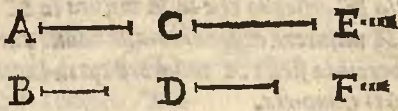
Lo stesso discorso si può adattare alla minor proporzione.

X I I.

Ma se nelle medesime quattro quantità, la proporzione della prima quantità alla secōda nō sarà maggiore, ne minore di quella proporzione incommensurabile, che ha la terza alla quarta quan-

uantità, la proporzione della prima quantita al-
seconda, si chiami medesima, ouero simile al-
proporzione incommensurabile, che ha la ter-
alla quarta quantita. E somiglianti quattro
antita si chiamino proporzionali incommen-
rabili.

Per asseri-
, che quat-
quantità,
, B, C, D,
no propor-



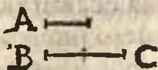
onali incommensurabili, è necessario, che la propor-
one di A à B non sia maggiore, ne minore della pro-
zione incommensurabile, che hà C à D, cioè sarà im-
ssibile, che si ritroui qualche proporzione commen-
rabile frà le infinite, che si possono asseguare, quale è
ella di E ad F di tal condizione, che la proporzione
A à B sia maggiore, ma la proporzione di C à D sia
inore della medesima proporzione, che hà la E ad F.
arimente sarà impossibile, che la proporzione di A à
sia minore, e la proporzione di C à D sia maggiore del-
medesima proporzione commensurabile di E ad F.

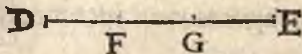
ASSIOMI.

I.

Se vna prima quantità misurerà vna seconda,
la seconda vna terza, la prima misurerà anco-
la terza.

Esempi grazia, se la quantità A misura la seconda
, e BC misura la terza DE. E manifesto, che la pri-





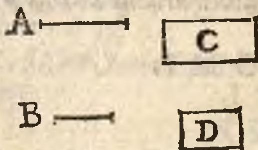
ma A misura anco- ra la terza DE. Im- percioche spartita DE nelle parti DF, FG, GE, ciascuna delle quali sia egua- alla BC, essendo che la A misura la BC, la medesi- a Ass. 6. del 1. *a A misurerà eziandio ciascheduna parte DF, FG, G- e perciò la stessa A misurerà tutta la DE delle dette parti composta.*

I I.

Proposte trè quantità, quella proporzion- che hà la prima alla seconda, auerà la terza qualche altra quantitá del medesimo genere.

I I I.

E quella proporzione, che hà la prima alla se- conda, auerà qualche altra quantità del medesi- mo genere alla terza.

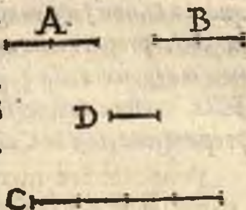


Come per esempio, s- vien data qualche propor- zione della quantità A- B. Manifesta cosa è, c- vna terza quantità C- qualche altra quantità di- medesimo genere D, hà la medesima proporzione, c- hà A à B. Auuenga che se bene talora non si sà qu- sia quella quarta quantità, egli è certo però ritrou- ella in natura. Imperciochè di qualsiuoglia data qua- tità

[qua]ntità C, si dà ancora qualsisia moltiplice, ò parti di lei. [M]a se è la proporzione della A à B incommensurabile, [q]uale è quella, che hà il diametro al lato del medesimo [q]uadrato, se si suppone esser la C diametro d'vn'altro [q]uadrato, si potrà dare il suo lato che sia B.

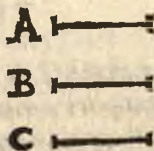
IV.

Se di due quantità eguali l'vna sarà parti di qualche [t]erza, l'altra ancora sarà [l]e medesime parti della [m]edesima terza, come era la prima.



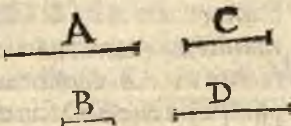
V.

I manco termini, che si richieggono per esprimere due proporzioni, saranno trè, prendendosi vno, come due conseguenti, ò come due antecedenti, ouero vno solo come antecedente d'vna proporzione, e conseguente dell'altra.



VI.

Se di quattro quantità sarà la prima maggiore della seconda, ma la terza non è maggiore della quarta, auerà la



prima alla seconda maggior proportione, che non ha la terza alla quarta.

Imperciochè essendo A maggiore di B, e C non maggiore di D, la proporzione della a quantità prima alla seconda sarà maggiore della commensurabile proporzione di egualità, per esser la prima A maggiore della seconda B; ma la proporzione della terza C alla quarta D, non sarà maggiore della medesima commensurabile proporzione di egualità, ponendosi la terza non maggiore della quarta. Laonde è chiaro, in virtù della decima diffinizione, auer la A alla B maggior proporzione, che la C alla D.

a *Dif. 9. di questo.*

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA I.

Se due quantità di altre due quantità saranno equimoltiplici, vicendeuolmente saranno insieme eguali, ò insieme maggiori, ò minori.

SIeno le quattro quantità, ò grandezze, ouero numeri AB, E, CD, & F tutte del medesimo genere, & AB sia tanto moltiplice di E, quanto CD è moltiplice dell'altra F; e sia primieramente E eguale ad F. Dico AB essere eguale a CD. S'intendano AB, & CD diuise nelle sue parti. È manifesto *a* tante parti AG, GH, & HB esser contenute in AB ciascheduna eguale ad E, quante parti CI, IK, e KD son contenute in CD, ciascheduna eguale alla medesima F. Adunque AG, CI es-

a *Dif. 5. di questo.*

CI essendo eguali alle eguali E, & F, saranno ancora eguali trà loro, e parimente GH, IK, come anche HB, e KD saranno tra loro eguali. Ora se alle eguali AG, CI si aggiugono le eguali GH, IK, saranno tutte le *b* AH, & CK eguali tra loro, e se alle medesime di nuouo si aggiungono le eguali HB, & KD, saranno le intere AB, e CD eguali fra di loro. Laonde quando la E è eguale alla F, ancora la AB è eguale alla CD.

b *Ass.* 2. *del lib.* 1.

A G H B   C I K D

E   F

A G H B   C I K D

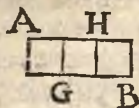
E   F

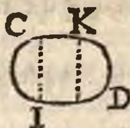
Sia secondariamente la E maggiore della F. Dico la AB esser maggiore della CD. Diuise l'equimoltiplici, come sopra, la AG sarà maggiore della CI, atteso che quella è eguale alla maggiore E, e questa alla minore F. Per la medesima ragione la GH sarà maggiore della IH, e la HB maggiore della KD. Ora se alla maggiore AG si aggiunge la maggiore GH, e se alla minore CI si congiunge la minore IK; e di più se alle medesime nella medesima maniera si accrescono altre parti disequali, tutta la AB sarà maggiore della CD.

Terzo sia la E minore della F. Dico la AB esser minore della CD. Perche la E è minore della F. Adunque la F sarà maggiore della E; e per-

c Per la 1. par. perciò ancora la c CD ſarà maggiore della AB

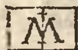
Quarto ſia la AB eguale alla CD. Dico la E eſſere eguale alla F. Se ciò non è vero, la E ſarà maggiore, ò minore della F. Adunque (per la ſeconda, e terza parte di queſta propoſizione) la AB ſarà maggiore, ò minore della CD, il che è contra il ſuppoſto. Adunque la E è eguale alla F.













Quinto ſia la AB maggiore della CD. Dico la E eſſer maggiore della F: ſe ciò non è vero, la E ſarà eguale, ò minore della F. Onde (per la prima, e terza parte di queſta) la AB ſara eguale, ò minore della CD, il che è contra l'ipoteſi. Per la qualcoſa la E ſarà maggiore della F. Laonde &c.

COROLLARIO.

Quindi è, che ſe due quantità ſaranno le medeſime parti di due quantità, ſaranno vicēdeuolmente inſieme maggiori, ò inſieme minori, ouero inſieme eguali.

Imperciòche ſe ſi porranno M, & N equimoltiplici delle medeſime E, & F, ſaranno *d* la AB di M, e la CD di N le medeſime parti: e *e* ſi come la E è maggiore, ò minore, ò eguale di F, così ancora la M ſara maggiore, ò minore, ò eguale di

d *Dif. 6. di queſto.*

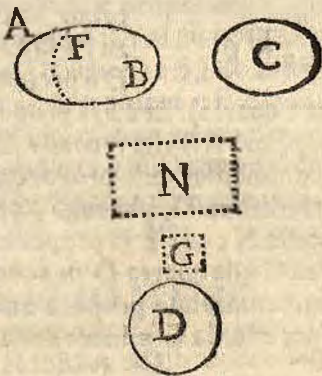
e *Prop. 1 di queſto.*

di N, e insiememente nel medesimo modo la AB sarà maggiore, ò minore, ò eguale della CD.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II.

Di due diseguali quantità, la maggiore à vna medesima hà maggiore proporzione, che non hà la minore. E la medesima alla minore auerà maggiore proporzione, che alla maggiore delle diseguali. *Eucl. 8. del lib. 5.*



Sieno due quãtità AB maggiore, C minore, e qualsiuoglia terza D del medesimo genere. Dico primamẽte che la AB alla D hà maggior proporzione, che la C alla medesima D. Dalla maggiore AB s'intenda leuata via la FB eguale alla C, sarà AF l'auanzo, e *a* s'intenda la D segata in parti eguali, e successiuamente in altre parti eguali, finche si ritroui la sua parte G, la quale sia minore di AF (il che è chiaro potersi fare, benche molte volte ne' numeri si deuano vsare i rotti). Dipoi si pren- *a Dalla prop. 27. del 2.*

prenda la G vna volta, ò due, ò tre, e così procedendo tante volte, finche non ne risulti la N cõposta dalla G, la quale sia prossimamente maggiore della FB, cioè l'auanzo della stessa N sopra la FB, non sia maggiore d'vna sua particella G: ed essendo la G minore della AF, sara l'auanzo della N sopra la FB minore della AF, e perciò la N sarà minore della AB, ma maggiore della FB, ouere maggiore della C, per esser la C, e la FB eguali. Si che saranno quattro quantità, la AB prima, la D seconda, la C terza, e la D quarta (poiche la D si prende, come seconda, e come quarta). Et è *b* la proposizione della quantità prima AB alla seconda D maggiore di quella commensurabile proporzione, che hà la N alla medesima D, auuenga, che la AB è maggiore della N; ed *c* è la proporzione della quantità terza C alla quarta D minore della medesima commensurabile proporzione, che ha la N alla D (per esser la C minore della N). Adunque *d* la quantità AB alla D ha maggiore proporzione, che nõ ha la C alla D.

A 2 F 8 B. C 8

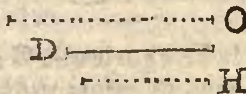
N 9 G 1½

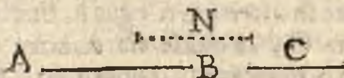
D 6

b *Dif. 9. di questo.*

c *Dif. 9. di questo.*

d *Dif. 10. di questo.*





Dico secondariamente, che la medesima D alla minore C hà maggiore proporzione, che alla AB.

AB Si faccia come sopra la N parti della D, che sia minore della AB, ma maggiore della C: e s'intēdano la O della AB, & la A della C esser le medesime parti, come la D è parti della N. E *e* perche la N è minore della AB, la D sarà minore della O; e parimente perche la N è maggiore della C, sarà la D maggiore della H. Per la qual cosa saranno quattro quantità, la prima D, la secōda C, la terza D (poiche la D si cōcepisce come prima, e come terza) e la quarta AB; *f* & è la proporzione della prima D alla seconda C maggiore di quella cōmensurabile proporzione, che ha la H alla C, ouero la O alla AB (auuenga, che il minore *g* di D stà a C come O a B) & la proporzione della terza D alla quarta AB è minore della medesima commēsurabile proporzione, che ha la O alla AB (atteso che D è minore di O). Adunque la D alla C ha maggiore proporzione, che non ha la D alla AB. Il che &c.

e Corol. della pr. 1. di questo.

f Diff. 9. di questo.

g Dif. 8. di questo.

h Dif. 9. di questo.

i Dif. 10. di questo.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III.

Le eguali quantità alla medesima hanno la medesima proporzione; e la medesima alle eguali.

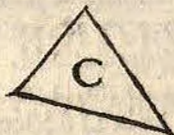
Euclid. 7. del lib. 5.

Sieno le quantità del medesimo genere A, B, e C, & la A sia eguale alla B. Dico la proporzione di A a C esser la stessa, che quella di B alla C; poiche, se ciò non è vero, *a* si ritrouarà qualche

a Aff. 3. di questo.

A B

D



che altra quantità in natura maggiore, ouero minore della A, la quale alla C abbia la medesima proporzione, che ha la B alla medesima C. S'intenda ella essere, ouero chiamarsi D. E perche la D, e la A si pongono disegguali, & è la B eguale alla A. Adunque *b* la D è maggiore, ò minore della B; e perciò la D alla C auera maggiore, ò minore proporzione, che nõ ha la B alla medesima C, che è impossibile; poiche la D alla C fù posta come la B alla medesima C. Non altra quantità adunque maggiore, ò minore della A stara alla C, come la B alla C; e perciò la medesima A alla C stará come la B alla C.

b prop. 2. di questo.

A 25. B 25.

D . . . . .

C 47.

Dico secondariamẽte la C auere la medesima proporzione alla A come alla B. *c* Poiche, se ciò non è vero, quella proporzione, che ha la C alla B, auera la C a qualche quantitá D altra di A. E perche la D, e la A si concedono disegguali, & è B eguale ad A; adunque D è maggiore, ò minore di B, e per questo *d* C a B auerà maggior proporzione, ò minore di quella, che abbia C a D, il che è impossibile; poiche C a B, & a D fù posto auer

c Ass. 2. di questo.

d prop. 2. di questo.

ier la medesima proporzione. Nõ hà adunque alla maggiore, ò minore di A la medesima oporzione, che C a B, e perciò C ad A ha la edesima proporzione, che a B. Per lo che è iaro &c.

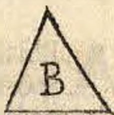
PROPOSIZIONE IV.

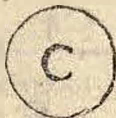
TEOREMA IV.

uelle quantità, che hanno ad vna medesima quantità la medesima proporzione, sono eguali trà loro. E quelle alle quali la medesima quantità hà la proporzione medesime, sono eziandio eguali trà loro. *Eucl. 9. del 5.*

Ieno tre quantità A, B, e C, e nel primo ogo la A a C abbia la edesima proporzioe, che B alla medesima . Dico A esser egua a B. Poiche se A non eguale a B le sarà mag iore, ò minore. Adunue *a* A a C auerà mag iore, ò minor proporzione di B alla medesima , che è contra il supposto. Adunque A non è aggiore, ò minore di B; si che le sarà eguale. *a prov. 2. di questo.*







Abbia nel secondo luogo la medesima C ad A medesima proporzione, che a B. Dico pariente A essere eguale a B. Poiche se A non è egua-

eguale a B, sarà maggiore, ò minore di lei. Laon de auer la medesima *b* C ad A minore, ò mag giore proporzione, che a B: il che è contra l'ipo tesi. Non è adunque la A maggiore, ò minore della B. Si che necessariamente le sara eguale che bisognaua &c.

b prop. 2. di questo.

PROPOSIZIONE V.

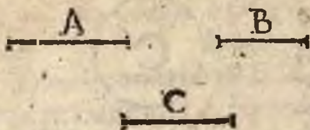
TEOREMA V.

Eucl. 10. del 5.

Delle quantità, che anno proporzione alla medesima quantità, quella che hà maggior proporzione, è maggiore. E quella alla quale la medesima quantità hà maggior proporzione è minore.

ABbia primamente A a C maggiore proporzione di B alla medesima C. Dico A esser maggiore di B. Poiche, se ciò non è vero sara A ò eguale, ò minore di B; e perciò A alla C auera la *a* medesima, ò *b* minore proporzione di quella, che hà B alla medesima C. Le quali cose sono false, e contra l'ipotesi. Non è adunque A eguale, ò minore di B. Onde è necessario la A essere maggiore della B.

a prop. 3. di questo.
b prop. 2. di questo.



Abbia secondariamente la medesima C a B maggiore proporzione, che ad A. Dico B essere mi-

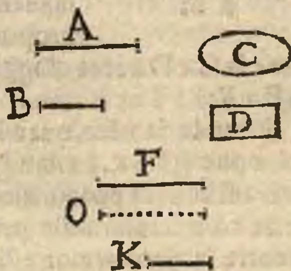
inore di A. Imperciochè se questo è falso, sarà ò eguale, ò maggiore di A; e perciò C à B auerà la *c* medesima, ò *d* minor porzione, che ad A; le quali cose sono contra il supposto. Nõ è adunque B eguale, ò maggiore di A. Onde le sarà minore. Le quali cose bisogna dimostrare. c *Prop. 3. di questo.* d *prop. 2. di questo.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI.

due porporzioni saranno simili, & vna di loro sarà maggiore, ò minore di qualche terza proporzione, eziandio la rimanente sarà maggiore, ò minore della medesima. *Eucl. 13. del 5.*

la A à B, come C à D: e qualsisia alproporzione F à E primamente A abbia maggiore proporzione, che F à Dico che la C alla auerà maggior proporzione, che la F al K. Perche A à B hà



maggior proporzione, che F à K. Adunque *a* la proporzione di A a B sarà maggiore d'vn'altra commensurabil proporzione (la quale ponghiamo essere quella di O a K). Ma la proporzione F a K sarà non maggiore della medesima com- a *Dif. 10. di questo.*

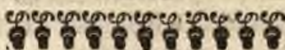
mensurabile proporzione della O a K. Dico ad esso, che la proporzione di C a D è maggiore della commensurabil proporzione di O a K. Im percioche, se è possibile, sia la proporzione di a D non maggiore della medesima commensurabil proporzione di O a K: ed essendo la proporzione di A a B maggiore della medesima commensurabile proporzione di O a K. Adunque b A a B hà maggiore proporzione, che la C a D che è contra l'ipotesi; è impossibile adunque, che la proporzione di C a D sia non maggiore della proporzione di O a K, e però sarà maggiore di lei: & è la proporzione di F a K non maggiore della medesima commensurabile proporzione di O a K. Adunque c la C a D auerà maggior proporzione, che la F a K.

b Dif. 10. di questa.

c Dif. 10. di questo.

A 7.	C 14.
B 6.	D 12.
F 10.	
O 9.	
K 6.	

Secondariamēte, quando A a B ha minor proporzione di F a K. In somigliante maniera dimostrerassi, che la proporzione di C a D è minore della commensurabile proporzione di O a K mentre la proporzione di F a K non è minore della medesima commensurabil proporzione di O à K. Onde la C a D auerà minor proporzione di quella, che ha la F a K. Le quali cose &c.

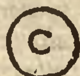


PRO:

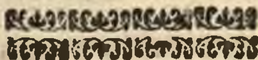
PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VII.

e proporzioni, che sono le medesime ad vna terza, sono le medesime ancora trà loro. *Eucl. 11. del 5.*



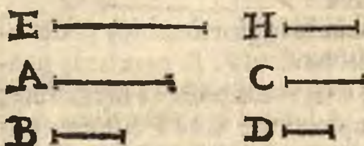

Sia la proporzione della quantità A a B, la medesima, che C a D, e parimente E ad F sia come C a D. Dico essere A a B, come E ad F. Se questo è falso, la A a B, se è possibile, abbia maggior, ò minor proporzione di quella, che ha E ad F. E perche la proporzione di E ad F è stata supposta la medesima, che C a D; e la proporzione E ad F è stata conchiusa maggiore, ò minore della proporzione di A a B. Adunque *a* C a D auerà maggiore, ò minor proporzione di A a B; il che è contra l'ipotesi. Attefo che C a D era come A a B. Adunque A a B non può auer maggiore, ò minore proporzione di E ad F; e perciò A a B sarà come E ad F. Il che si doueua dimostrare. *a prop. 6. di questo.*



PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VIII.

Se saranno quattro quantità proporzionali, e la quint
sarà maggiore della prima, e la sesta non maggior
della terza, auerà la quinta alla seconda maggior
proporzione che la sesta alla quarta. E la quinta
alla sesta auerà maggiore proporzione, che la prim
alla terza. E se la quinta sarà maggiore della secon
da, e la sesta non maggiore della quarta, aurà la pri
ma alla quinta minor proporzione, che la terza
alla sesta.



ABbia la A
a B la pro
po zion med
ama, che ha
si D, & E sia
maggiore di A
& H non sia maggiore di C, cioè sia H eguale,
minore di C. Dico primamente E a B auer mag
a prop. 2. gior proporzione di H a D: perche *a* la maggio
di questo. re E alla B hà maggior proporzione, che la mi
b *prop. 6.* nore A alla medesima B, & è C a D come A a B
di questo. Adunque *b* E a B hà proporzione maggiore di
c *prop. 3.* a D. Ma C è eguale, ò maggiore di H. Adunque
di questo. c C alla medesima D hà la medesima, ò *d* mag
d *prop. 2.* giore proporzione, che H a D. Laonde la *e* pro
di questo. porzione di E a B sarà per ancora maggiore del
e *prop. 6.* la
di questo.

la proporzione di H a D.

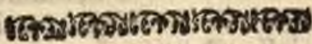
E 7.	H 27.
A 6.	C 30.
B 5.	D 25.

Dico nel secondo luogo, E ad H auer maggior proporzione, che A a C. Perche E è maggiore di A. Adunque *f* E ad H auerà maggior proporzione, che non ha A alla medesima H, & è H eguale, ò minore della C. Adunque la medesima A ad H há *g* la medesima, ò *h* maggior proporzione che ha C. E perciò *i* E ad H auera per ancora maggiore proporzione di quella, che há la A a C.

f prop. 2. di questo.
g prop. 3. di questo.
h prop. 2. di questo.
i prop. 6. di questo.

Sia nel terzo luogo E maggiore della seconda B delle proporzionali, & H non sia maggiore di D. Dico A ad E auer minor proporzione, che C ad H. Perche è maggiore di B, ma H non è maggiore di D. Adunque *k* la medesima A alla maggiore E auerà minor proporzione, che alla B minore; & è C a D come A a B. Adunque *l* A ad E há minor proporzione, che C a D. Ma la medesima C alla non maggiore H há la *m* medesima, ò *n* maggiore proporzione, che alla D: e però *o* la proporzione di A ad E sarà per ancora minore della proporzione di C ad H. Come era stato proposto.

k prop. 2. di questo.
l prop. 6. di questo.
m prop. 3. di questo.
n prop. 2. di questo.
o prop. 6. di questo.



PROPOSIZIONE IX.

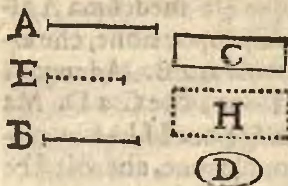
TEOREMA IX.

Eucl. Corol. della prop. 4. del 5.

Se la prima quantità alla seconda auerà la medesima proporzione, che la terza alla quarta, sarà la seconda alla prima, come la quarta alla terza. Si chiami cotal sorte d'argomentare inuersione della proporzione.

Sia la A a B come la C a D. Dico la B ad A auere la medesima proporzione, che la D a C. Poiche se ciò non è vero, auera B ad A maggiore, ò minor proporzione, che non ha C a D. E se è possibile, sia nel primo luogo tal proporzione maggiore. Adunque *a* la proporzione di B ad A sarà maggiore, e la proporzione di D a C non sara maggiore della medesima proporzione

a Dif. 10. di questo.



commensurabile (la quale ponghiamo essere quella, che ha la quantità E ad A, & H a C) e perciò B sarà maggiore di E, ma D non sarà maggiore di H. E perche E ad A, & H a C sono nella medesima proporzione commensurabile. Adunque *b* E di A, & H di C saranno ò equimoltiplici, ò la medesima parte, ò le medesime parti, e *c* per il contrario A di E, e C di H saranno la medesima par-

b Dif. 8. di questo.
c Dif. 4. e 5. di questo.

arte, ò equimoltiplici, ò le medesime parti; e perciò *d* A ad E, e C ad H saranno nella medesima proporzione; & è B maggiore di E, e D non maggiore di H; adunque *e* A a B ha minor proporzione di quella, che abbia C a D, il che è impossibile, perche fù supposta la proporzione di A a B la stessa di quella di C a D. Per la qual cosa B ad A non auerà maggiore proporzione, che abbia D a C. Si dimostrerà similmente, che la D alla C non ha maggiore proporzione, che B ad A, perciò ne anche B ad A auerà minor proporzione, che la D alla C. Laonde B ad A sarà come D a C. Il che doueua dimostrarsi.

d *Dif. 8. di questo.*
e *prop. 8. di questo.*
f *Diff. 12. di questo.*

COROLLARIO.

Da questa dimostrazione si raccoglie, che se la prima auerà alla seconda maggior proporzione, che la terza alla quarta, inuertendo la seconda alla prima, auerà minor proporzione, che la quarta alla terza. Auuengache dall'essersi posta la proporzione di B ad A maggiore, che quella di D alla C, ne seguì, che la proporzione di A a B fusse minore della proporzione di C a D.

Di Pappo Alessand. prop. 7. del lib. 1.



PROPOSIZIONE X.

TEOREMA X.

Se di quattro quantità del medesimo genere, le due antecedenti saranno equimoltiplici delle due conseguenti, e l'antecedente sarà moltiplice dell'antecedente solamente, ouero la conseguente della conseguente, saranno vicendeuolmente proporzionali.

SIeno quattro quãtità del medesimo genere, & AB della E, come anche la CD della F sianc equimoltiplici; e prima sia E moltiplice di F. Dico la AB a CD essere come E ad F. Perche le AB, e CD sono equimoltiplici di E, & F, diuise i antecedenti nelle sue parti, saranno in AB *a* tante parti AG, GH, & HB ciascheduna eguale a E, quante in CD sono le parti CI, IK, e KD, ciascheduna eguale ad F; e perciò quale parte è F di E, la medesima parte saranno CI di GA, & IK di GH, e KD di HB. Adunque *c* quante volte fà mestieri moltiplicare la F, accioche ella diuenga eguale ad E, tante volte fà mestieri moltiplicare CI, perche sia eguale alla AG, e tante volte la IK si dee moltiplicare, per farsi eguale alla GH, e similmente

a Dif. 5. di questo.

b prop. 1. di questo.

A G H B C I K D

F E

M

di questo.

c Dif. 4.

la

a KB tante volte si ha da moltiplicare, per esse- re eguale alla HB; e così le altre parti, se più ve ne saranno, le quali tante sono in CD, quante in AB. Adunque quante volte la F si dee moltiplica- re per diuenir eguale ad E, tante volte le CI, IK, KD, cioè la stessa CD si ha da moltiplicare per diuenir eguale ad AG, GH, HB, ouero alla stes- sa AB. E per questo la CD tante volte misura la AB, quante volte la F misura la E, e *d* perciò tan- to la AB è moltiplice della CD, quanto la E del- la F. Come &c.

d Dif. 3. di questo.

Secondariamente, poste le medesime cose, sia AB moltiplice di CD. Dico che E ad F sarà co- me AB alla CD. Si faccia la M tanto moltipli- ce della F, quanto la AB della CD; & è la parte CD moltiplice della F. Adunque *e* AB ad M è come CD ad F. Ma era come la CD alla F, così la AB alla E. Adunque *f* la medesima AB alle due M, & E hà la medesima proporzione, e per- ciò *g* E, & M sono eguali tra loro: onde *h* saran- no equimoltiplici la AB della CD, e la M, ò pure la E della F. Per la qual cosa &c.

e Dalla 1. parte di questa prop.
f prop. 7. di questo.
g prop. 4. di questo.
h prop. 3. di questo.



PRO-

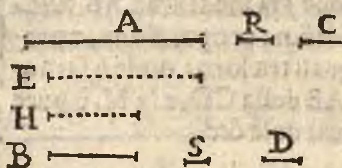
PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA XI.

Eucl. 15. del lib. 5. *Le parti anno la medesima proporzione, che le loro equimoltiplici, essendo del medesimo genere.*

SIa tanto moltiplice la A di B, quanto la C di D, e del medesimo genere. Dico la A a C esser come B a D. Perche se questo è falso, abbia primamente se può essere la A a C maggiore proporzione di B a D. Adúque *a* la proporzione di A a C sarà maggiore, e la ꝓporzione di B a D non sarà maggiore della medesima proporzione commensurabile (la quale s'intenda auere la E a C, & H a D, e le loro comuni misure sieno le R, & S) Laonde la A sarà maggiore di E, ma

a Dif. 10. di questo.



la B non sarà maggiore di H. E perche le C, D sono eguali, ò equimoltiplici delle R, & S (misurando queste egualmente quelle) & è C moltiplice di D. Adunque *b* la R di S, e la C di D saranno equimoltiplici. Di più perche E, & H sono eguali, ouero equimoltiplici di R, & S, & R è moltiplice di S. Adunque *c* la E è così moltiplice della

b prop. 10 di questo.

H, come R di S, ò pure come C è moltiplice di
; ma la A della B è tanto moltiplice, quanto C
lla D; adunque la E della H è tanto moltipli-
, come la A è moltiplice della B, e *d* perciò, si d *prop. 1. di questo.*
me la E è minore della A, così la H è minore
lla B; e pure la stessa H fù concessa non mino-
della B, il che è impossibile. Non ha adunque
A alla C maggiore proporzione della B alla
. Con vn simigliante discorso si dimostrerà la
alla C non hauere minor proporzione della e *Dif. 12. di questo.*
lla D. Laonde *e* la A alla C sarà come la B al-
D. Il che doueua prouarsi.

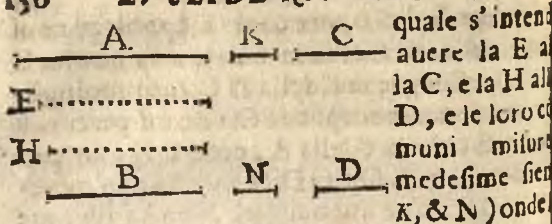
PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA XII.

quattro quantità del medesimo genere saranno pro- *Eucl. 16. del lib. 5.*
porzionali, saranno ancora vicendeuolmente pro-
porzionali. E si chiami cotal forma di argomentare
permutazione di proporzione.

Ia la A alla B, come la C alla D, e sieno tutte
del medesimo genere. Dico la A alla C esse-
come la B alla D. Che se ciò non è vero, la A
a C auerà maggiore, ò minor proporzione
lla B alla D. E sia nel primo luogo, se è possi-
le tal proporzione maggiore. Adũque *a* la pro- a *Dif. 10. di questo.*
rzione della A alla C sarà maggiore, e la pro-
rzione della B alla D nõ sarà maggiore d'vna
edesima proporzione commensurabile (la-

qua-



quale s'inten[...] auere la E a[...] la C, e la H al[...] D, e le loro c[...] muni misur[...] medesime sien[...] K, & N) onde [...] A sarà maggiore della E, ma la B non sar[à] mag[...]

b prop. 8. di questo. giore della H; ed essendo la E alla C, come la [...] alla D. Adunque *b* la proporzione della A alla [...]

c prop. 11. di questo. sarà maggiore di quella della E alla H: ma *c* la [...]

d prop. 6. di questo. K alla N è come la E alla H (essendo elle med[...] sime misure di queste). Adunque *d* la A alla B [...]

e prop. 1. di questo. maggiore proporzione, che la K alla N: ma *e* [...] C alla D stà come la K alla N (essendo queste [...]

f prop. 6. di questo. medesime misure di quelle). Adunque la *f* A al[...] B hà maggior proporzione, che la C alla D, [...] che è impossibile; attesoche la A alla B fù [...] posta come la C alla D. Per la qual cosa la A a[...] C nō aura maggior proporzione della B alla [...]

Similmente si dimostrerà, che la A alla C [...] anche hà minor proporzione, che la B alla [...] Laonde la A alla C aura la medesima propo[r]zione, che hà la B alla D. Come era stato prop[o]sto. Si chiami questo modo di argomentare p[er]mutazione di proporzione.

COROLLARIO.

Di Pappo la 17. del 7. Si caua da questa dimostrazione, che se la p[ri]ma quantità alla seconda aurà maggior prop[or]zione, che non hà la terza alla quarta, perm[u]tando

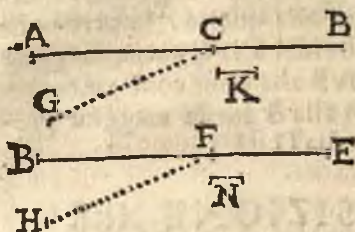
ando la prima alla terza, aur maggior propor-
ione della seconda alla quarta. Imperciòche
all'esserfi posto, che la A alla C aueua maggior
proporzione, che la B alla D, ne conseguir per-
mutando, che la A alla B auesse maggior pro-
porzione, che la C alla D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA XIII.

Se quattro quantità saranno proporzionali, le differenze de' termini à i conseguenti, aueranno la stessa proporzione; e per il contrario. *Eucl. 17. del 5.*

Sia la AB alla BC, come la DE alla EF. Dico che la AC differenza de' primi termini al cōseguente CB stà come la DF differenza de' secondi termini all'altro conseguente EF. Perche, se ciò non è vero, la AC alla CB aurà maggiore, ò minor proporzione di quella, c'hà la DF alla FE. Sia prima la proporzione maggiore. Adunque la proporzione della AC alla CB sarà maggiore, ma la proporzione di DF ad FE nō sarà maggiore d'vna medesima proporzione commensurabile (la quale ponghiamo, che abbia la GC a CB, e HF ad FE, e le loro communi misure medesime siano K, & N). Per la qual cosa AC sarà maggiore di GC, ma la DF non sarà maggiore di HF. E perche le GC, & HF sono egualmente misurate dalle K, & N. Adunque *b* tante parti vi sa- *a Dif. 10. di questo.* *b Dif. 4. di questo.*



ſaranno in G
ciaſcuna egua
a K, quante v
ne ſono in H
ciaſcuna egua
ad N. Di p
perche le ſteſ
K, N miſura
egualmente l

c *Dif. 4. di queſto.* CB, & FE, tante *c* parti vi ſaranno in CB ciaſc
na eguale a K, quante ve ne ſono in FE ciaſcu
eguale ad N. Per la qual coſa ſe alle eguali mo
titudini di parti contenute in GC, & HF, ſi ag
giungano le eguali moltitudini delle parti cont
nute in CB, & FE, ſaranno in GB tante parti
guali a *K*, quãte ve ne ſono in HE ciaſcuna egu

d *Dif. 6. di queſto.* le ad N. E però la GB *d* ſarà le medeſime par
di BC, che è la HE della EF. E perche ſi conc
dette AC maggiore di GC aggiunta commun
mente la CB, ſara anche AB maggiore di GB.
perche la DF non era maggiore di HF, aggiu
ta communemente la FE, ſara la DE non ma

e *Dif. 8. di queſto* giore di HE. E perche *e* la GB alla BC ſtà co
HE ad EF, ed è la AB maggiore della GB,

f *prop. 8. di queſto.* la DE non è maggiore di HE; adunque *f* la A
alla BC aura maggiore proporzione, che non h
la DE alla EF; la qual coſa è impoſſibile. Poich
per l'ippoteſi la AB alla BC ſtaua come la D
alla EF. Non aura dunque la AC alla CB ma
giore proporzione di quella, che hà la DF alla
FE. Similmente ſi prouarà che la AC alla CB n

an-

che hà minor proporzione di quella, che si ab-
la DF alla FE. Per la qual cosa la g AC alla g Dif. 12. di questo.
B sta come la DF alla FE. Il che si doueua nel
mo luogo prouare. E poiche la AC a CB si è
mostrato esser come DF ad FE, adunque h in- h prop. 9. di questo.
tendo la BC alla CA, stara come la EF alla
D. Il che si doueua &c.

COROLLARIO.

Quinci è, che se la prima alla seconda auerá Pappo 3. del 7.
ggiore proporzione, che la terza alla quarta,
somma della prima, e della seconda auera alla
onda maggiore proporzione, che la somma
la terza, e della quarta alla quarta. Auuenga
e dall'esser posta la proporzione della AC al-
CB maggiore di quella di DF alla FE, dimo-
isi la AB alla BC auere maggiore proporzio-
della DF alla EF.

PROPOSIZIONE XIV.

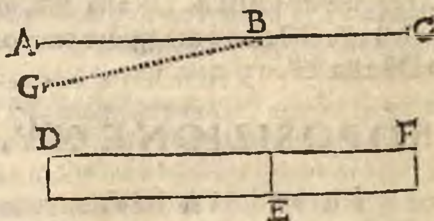
TEOREMA XIV.

*uattro quantità saranno proporzionali, le somme Eucl. 18. del 5.
e' termini à conseguenti, ouero à gl'antecedenti sa-
anno ancor' esse proporzionali, e proporzionali sa-
anno à gli antecedenti le differenze de' termini.*

E per il contrario.

a AB a BC, come DE ad EF. Dico che le som-
me de' termini alle conseguenti son propor-
zio-

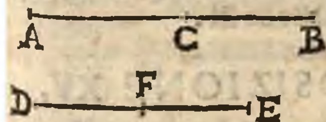
zionali, cioè come AC a CB, così sta DF ad F[E]
Se questo non è verò, aurà AC a CB maggiore,
minor proporzione, che DF ad FE. E sia prim[a]
a *Dalle prop. 5. e 6 di questo.* la proporzione maggiore. Adunque *a* qualch[e]
quantità minore di AC, quale pongasi esser GC
aura alla CB la stessa proporzione, che DF a[d]
b *prop. 13 di questo* FE, e *b* comparendo le differenze a i termini con-
seguenti, cioè GB a BC starà come DE ad EF, m[a]
la AB è maggiore della GB (imperòche AC er[a]
maggiore di GC, e si toglie communemente l[a]
c *prop. 2. di questo.* BC); adunque *c* la AB alla BC aura maggior
proporzione della GB alla medesima BC. M[a]
d *prop. 6. di questo.* era GB a BC, come DE ad EF, *d* però AB a B[C]
aura maggior proporzione, che DE ad EF, il ch[e]



è falso, essendosi supposta la AB alla BC, com[e]
la DE alla EF. Non aura adunque la AC alla C[B]
maggiore proporzione, che la DF alla FE. Simi[l]-
mente si mostrerà, che la AC alla CB non ha mi-
e *prop. 12 di questo.* nor proporzione, che la DF alla FE. Per *e* la
qual cosa AC a CB starà come DF ad FE. Et dop-
f *prop. 9. di questo.* po *f* interuenendo BC a CA, starà come EF ad
FD;

); adunque è vera la prima parte, e la sua con-
ſa.

Nel ſecondo luogo dico, che le ſomme de'ter-
ni a gli antecedenti ſono proporzionali, cioè
ad AB, ſtarà come DF a DE. Perche per
potesi AB a BC, ſtà come DE ad EF; adunque g prop. 9. di queſto.
uertendo CB a BA, ſtà come FE ad EB, e h h Per la 1. parte di queſta prop.
mparando le ſomme de'termini a i conſeguen-
ſtarà la CA alla AB, come la FD alla DE: e
i inuertendo AB alla CA, ſtà come ED a DF, i prop. 9. di queſto.
erò è vera la ſeconda parte è la ſua conuerſa.



Terzo ſieno i medeſimi termini proporzionali AB a BC, come DE ad EF. Dico che le antecedē-
alle differenze de'termini ſaranno proporzio-
li, cioè AB ad AC ſtarà come DE a DF, & per
cōtrario CA ad AB, ſtarà come FD a DE. Per-
e AB a BC, ſtà come DE ad EF; adunque k cō- k prop. 13 di queſto.
rando le differenze de'termini a i cōſeguenti,
ra AC a CB, come DF ad FE, & l inuertendo l prop. 9. di queſto.
aCA, come EF ad FD, e m comparando le m Part. 1 di queſta prop.
mme de'termini a i conſeguenti, ſarà BA ad
C, come ED a DF; e finalmente n inuertendo n prop. 9. di queſto.
ad AB, ſarà come DF ad FE; le quali coſe ſi
oueuano dimoſtrare.



COROLLARIO.

Del Căpano 29. del 5.

Cauasi dalla prima parte di questa proposizio ze, che se la prima alla seconda aurà maggio proporzione, che la terza alla quarta, la diffe renza de'termini primo, e secondo al secondo aura maggior proporzione, che la differenza de'termini terzo, e quarto a quarto termin Poiche dall'esfersi posta la proporzione di AC CB maggiore che la proporzione di DF ad FE, dimostrò che la AB alla BC hauea maggior pro porzione, che la DE alla EF.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XV.

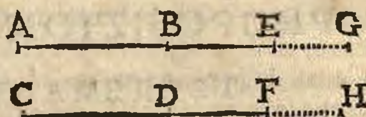
Eucl. 19. & 12. del lib. 5.

Se quattro quantità del medesimo genere saranno pro porzionali, le somme, ò le differenze degli Omologhi termini saranno nella stessa proporzione; e per il contrario.

SIan prima quattro termini proporzionali AB a CD, come BE a DF. Dico che le somme degli Omologhi nella prima figura, e le differen ze nella seconda, cioè la AE alla CF auerà la stes sa proporzione, che hà la AB alla CD. Perche la AB alla CD, stà come la BE alla DF. Adun que *a* permutando la AB alla BE, starà come la CD alla DF, e *b* comparando le somme de'ter mini

a prop. 12 di questo.
b prop. 14 di questo.

ai nel pri-
caso, e *c* le
erenze nel
ondo alle
eguenti sa-
AE alla E

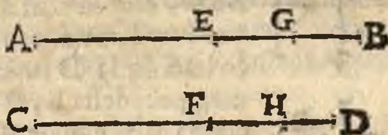


c prop. 13 di questo.

come la CF alla FD, e *d* permutando di nuouo AE alla CF, aura la stessa proporzione, che la alla DF, ò pure che la AB alla CD Sieno in re EG ad FH, come BE a DF, ò pure come a CD. Dico parimente che le somme, ò le ferenze di tutti gli Omologhi anno la medesi-

d prop. 12 di questo.

propor-
ne, cioè
a CH
r come
a CD;
rche fù di-



strata la AE alla CF esser come EB ad FD, è EG ad FH, come BE a DF. *e* Adunque AE F, stà come EG ad FH: la onde (per la prima rte di questa proposizione) la AG alla CH sa- come EG ad FH, ò pure come AE a CF, ò ve- mente come AB a CD. Le quali cose si doue- no dimostrare.

e prop. 7. di questo.



PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA XVI.

Eucl. 25. del 5.

Se quattro quantità del medesimo genere saranno pro porzionali, la massima, e la minima saranno maggiori delle due rimanenti.

A | F | C | B | D | H

Sieno le quattro quantità del medesimo genere proporzionali A alla B nella medesima proporzione, che la C alla D, e sia la massima di tutte, e la D minima. Dico la A, e la D insieme prese esser maggiori della B, & C insieme. Si ponga la F eguale all'auanzo della massima A sopra la C, e la H sia eguale all'eccesso della B, sopra la minima D. E'manifesto, che la C, e la F insieme sono eguali alla A, e che la D, e H insieme sono eguali alla B. E perche come sta A a B, ouero come il tutto FC stà al tutto HD così stà C a D. Adunque *a* le differenze degli Omologhi saranno proporzionali, cioè l'auanzo F all'auanzo H starà come FC ad HD, cioè come A a B. Ma perche A, come massima, è maggiore di B, ancora F sarà maggiore di H (perche se non fosse maggiore, A a B *b* auerebbe maggior proporzione, che F ad H, il che è falso, atteso che A, B, F, H furono dimostrate proporzionali) se adunque

a prop. 15 di questo.

b Ass. 6. di questo.

alle diseguali F., & H si aggiugnerà commu-
iente la somma delle C, & D, la somma delle
ntita F, C, & D *c* sarà maggiore della somma c *Ass.* 4. *del* 1.
e quantità H, D, e C: ma F, C, e D sono egua-
l A, e D (essendosi FC mostrata eguale ad A,
commune) e per la medesima ragione H, D,
sono eguali a B, e C. Adunque la massima A
eme con la minima D, son maggiori, che la
: C insieme prese. Il che bisognaua &c.

COROLLARIO.

Di quì si raccoglie, che se quattro quantità son *Eucl.* 14. *del* 5.
oporzionali saranno direttamente, e vicen-
uolmente insieme maggiori, ò insieme eguali,
nsieme minori.

Impercioche A a B fù dimostrata come F a H.
si prouò, che quando *d* A è maggiore di B, non d *prop.* 16
a F eguale, ò minore di H: e per il contrario. *di questo.*
dunque l'antecedenti A, & F saranno insieme
aggiori, ò insieme eguali, ò insieme minori del-
conseguenti B, & H. Di più, *e* perche inuerten- e *prop.* 12
A ad F, stà come B ad H. Adunque A, e B so- *di questo.*
o insieme maggiori, ò insieme eguali, ò insieme
inori di F, & H.

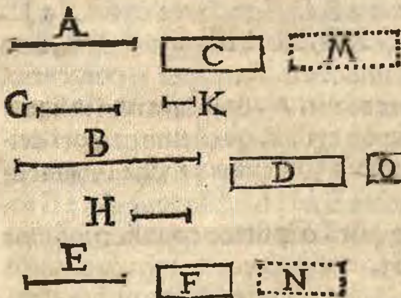


PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA XVII.

Se à due simili proporzioni commensurabili si conti- nueranno due altre simili proporzioni commensu- rabili, i primi termini à gl' vltimi auranno la me- desima commensurabile proporzione.

ABbia A a B la medesima commensurabile proporzione, che hà C a D, e B ad E sti nella medesima cõmensurabile proporzione, ch hà D ad F. Dico che A ad E hà la medesima com mensurabile proporzione, che hà C ad F. Sia G misura commune delle due quantità A, e B, & H sia commun misura dell due B, E: e s'intenda la quantità *a* K la qual misu tãte volte G quãte H mi sura la B. A dunque *b* pe



a *Aſſ.* 3. *di queſto.*

b *prop.* 10 *di queſto.*

mutando K, misurerà tante volte H, quante vo te G misura la B; & misurando H le B, & E, a cora la *c* K misura le stesse B, & E. Di più perch K misura G, e G misura le A, B. Adunque *d* la medesima K misura non solamente E, ma anco ra

c *Aſſ.* 1. *di queſto.*

d *Aſſ.* 1. *di queſto.*

A, e B. Di poi s'intenda la O, *e* che tante vol- misuri D, quante volte K misura B, & M stia O, come A a K, e parimente N stia ad O, co- E a K. E perche A, & M sono equimoltipli- delle K, & O, & sono eziandio E, & N equi- oltiplici delle medesime K, & O. Adunque *f* A e medesime parti di E, che la M dell'altra N; e no B, e D equimoltiplici delle medesime K, & . Adunque *g* A, & M sono le medesime parti lle B, e D. Ma C a D staua come A a B. Adun- e *h* C, & M sono le medesime parti della me- sima D; e *i* perciò C è eguale ad M. Nella me- sima guisa si dimostrerà F eguale ad N. Laon- *k* C ad F, starà come M ad N. E dimostrossi ad E esser come M ad N. Adunque *l* A ad E rà come C ad F; il che bisognaua prouare.

e *Ass. 3. di questo.*
f *Dif. 6. di questo.*
g *Dif. 6. di questo.*
h *prop. 7. di questo.*
i *prop. 4. di questo.*
k *prop. 3. di questo.*
l *prop. 7. di questo.*

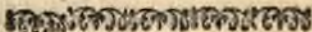
COROLLARIO.

Si caua dalla dimostrazione di questa proposi- one, che due quantità, le quali sono commen- rabili ad vna terza, sono ancora commensura- li trà loro.

Eucl. 12. del 10.

Imperòche A, & E si posero commensurabili la medesima B; perche G era misura commune lle due A, e B, e similmente H era misura com- une delle due B, & E; e *m* dimostrossi che la K isuraua ambedue le estreme A, & E.

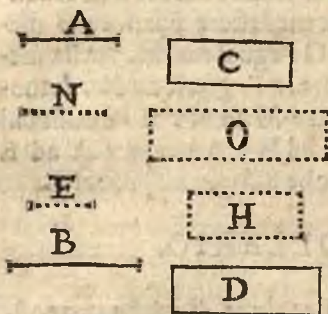
m *pro. 17. di questo.*



PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XVIII.

Se quattro quantità saranno proporzionali, le antecedenti saranno eziandio proporzionali à due quantità, che abbiano alle medesime conseguenti la stess proporzione commensurabile.



ABbia A a B l medesima proporzione, ch C a D, & abbia E B la medesima pro porzione commen surabile, che há H D. Dico, che A a E stà come C ad H Poiche, se ciò no è verò, auerà A ad E maggiore, ò minor propor zione, che C ad H: e sia prima la proporzion maggiore, se è possibile. Adunque *a* la propor zione di A ad E sarà maggiore, ma la proporzio ne di C ad H non sarà maggiore della medesim proporzione commensurabile (la quale abbia no N ad E, & O ad H) e perciò A sarà maggior di N, ma C non sarà maggiore di O. E perche N ad E hà la stessa proporzione commensurabile che O ad H, e parimente E a B, & H a D hann la medesima proporzione commensurabile. Adun-

a *Dif* 10. *di questo.*

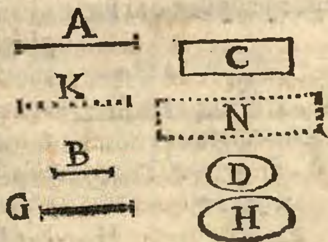
dunque *b* N a B hà la medesima proporzione b *prop.17 di questo.*
ommensurabile che ha O a D; & è A maggiore c *prop. 8. di questo.*
N, e C non maggiore di O. Adunque *c* A a B
rà maggior proporzione di C a D, il che è im-
ossibile, poiche A, B, C, D furono supposte pro-
orzionali. Non auera adunque A ad *E* propor-
ione maggiore di C ad H. Si dimostrera simil-
ente, che neanche A ad *E* ha minor propor-
ione di C ad H. Laonde *d* A ad *E* sta come C ad d *Dif.12 di questa.*
I. Il che auea a prouarsi &c.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XIX.

e à simili proporzioni con ordinata serie si aggiugne-ranno pari moltitudini di proporzioni simili: i termini primi à gl'vltimi haueranno la medesima proporzione. Si chiami cotal forma di argomentare Composizione ordinata di proporzioni. Eucl. 22. del 5.

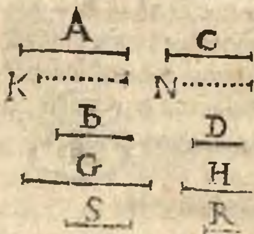
Sia la proporzione di A alla B simile, ouero la medesima di quella della quantità C alla D, e a queste s'aggiugano altre proporzioni simili con ordine tale, che la B a G stia come D



ad

ad H. Si dee dimoſtrare, che la proporzione di A a G è la medeſima, che quella di C ad H. Poi che, ſe ciò non è vero, A a G auerà maggiore, ò minor proporzione di quella, che ha C ad H: & ſe è poſſibile ſia la proporzione maggiore. Adunque la proporzione *a* A a G ſarà maggiore, e la proporzione di C ad H non ſarà maggiore della medeſima proporzione commenſurabile (la quale abbiano K a G, & N a H) e perciò A ſarà maggiore di K, e C non ſarà maggiore di N. Perche B a G ſtà come D ad H, e K a G ha la medeſima proporzione cõmenſurabile, ch N ad H. Adunque *b* come B a K coſi ſta D ad N, & *c* inuertendo K a B ſtarà come N a D, & è A maggiore di K, e C non maggiore di N. Adunque *d* A a B hà maggior proporzione di C a D; il che non può eſſere. Auuenga che A a B fù ſuppoſta come C a D. Non hà adunque A a G maggior proporzione di C ad H. Dimoſtrerasſi ſimilmente, che A a G neanche ha minor proporzione di C ad H. E perciò *e* A a G ſtarà come C ad H. *E* ſe di nuouo altre proporzioni ſimili G ad S, & H ad R ſi aggiugneranno ſucceſsiuamente, cõſiderando mai ſempre nel medeſimo modo le quantità A, G, S, e l'altre tre C, H, R, le cõpoſte proporzioni A ad S, e C ad R, ſi dimoſtreranno, come ſopra, eſſere medeſime, come è ſta-

a *Dif.* 10. *di queſto.*
b *prop.* 18 *di queſto.*
c *prop.* 9. *di queſto.*
d *prop.* 8. *di queſto.*
e *Dif.* 12. *di queſto.*

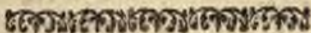


proposto. Si chiami cotal forma di argomen-
Composizione ordinata delle proporzioni.
E se per auuentura le componenti proporzio-
continuate A a B, B a G, e G ad S, saranno simi-
ò medesime tra loro. Si chiami la proporzio-
della A alla G dupplicata della proporzione
lla A alla B, ouero della B alla G, e la propor-
one della A alla S, si chiami triplicata d'vna
lle proporzioni di A alla B, e sesquialtera del-
proporzione della A alla G, e così successiua-
ente. Ma se le proporzioni continuate della A
la B, e della B alla G, e della G alla S nō saran-
le medesime tra loro, si chiamerà assolutamē-
la proporzione della A alla S composta dalle
amezze proporzioni della A alla B, della B al-
G, e della G alla S.

COROLLARIO I.

Se quattro quantità saranno proporzionali, qualunque equimoltiplici delle antecedēti, a qualunque equimoltiplici delle conseguenti saranno proporzionali. *Eucli.d.4. del 5.*

Imperòche se B a G stà come D ad H, & a queste si aggiungano altre proporzioni con metodo ordinato, facendo che A sia così moltiplice di B, come C di D, e G sia la medesima parte di S, & H di R. Parimente *f* A ad S starà come C ad R. *f prop. 19. di questo.*



COROLLARIO II.

Da questa dimostrazione si caua, che se si di sporranno con ordine continuato pari moltitu dini di proporzioni, quella che è composta dall maggiori, sara maggiore di quella che è compo sta dalle minori.

g prop. 19 di questo. Auuengache g la proporzione di A a B vien cōposta dalle proporzioni di A a G, e di G a B, la proporzione di C a D si cōpose delle propor zioni di C ad H, e di H a D; e la proporzion di A a G fù concessa maggiore della proporzio ne di C ad H, *h* & inuertendo G a B sta come H a D; e dimostrossi la proporzione di A a B mag giore di quella, che ha C a D. h prop. 9. di questo.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XX.

Eucl. 23. del 5. *Se à proporzioni simili vi se ne aggiugneranno altre simili proporzioni con serie non ordinata; i termin supremi à gl' infimi saranno eziandio proporziona li. E si chiami questa sorte di argomentare Compo zione perturbata di proporzioni.*

STia la quantità A alla B come la C alla D; e a queste proporzioni simili, vi se ne aggiunga no ancora due altre tra loro simili, ma con vn ordine perturbato, in maniera, che B ad E sia

come

ome F a C. Dico
he la proporzione
i A ad E, composta
alle proporzioni
i A a B, e di B ad E,
la medesima di
uella di F a D; la



uale è composta delle stesse proporzioni di C a
), e di F a C. E perche qual proporzione hà B
d E, tale l'aurà *a* qualche altra quantità ad A, a Ass. 3. *di questo.*
enche ella non sia nota, tuttauolta perche
vero, che ella si troua in natura, supponghia-
io che sia G, ouero si chiami G. E perche
ad A stà come B ad E, ma F a C stà come la me- b *prop. 7.*
esima B alla medesima E. Adunque *b* G ad A *di questo.*
a come F a C, & A a B stà come C a D, e però c *prop. 19*
er *c* l'ordinata composizione G a B starà come *di questo.*
a D. Dipoi perche come G ad A, così è B ad
, adunque *d* permutando come G a B, così stà d *prop. 12*
ad E, ma come G a B cosi dimostrossi F a D; *di questo.*
dunque come *e* A ad E, cosi starà F a D. Se di e *prop. 7.*
uouo altre proporzioni simili E *di questo.*
d H, e K ad F, con la medesima
rie non ordinata si aggiugne-
nno, considerando mai sem-
re nella medesima maniera tre
antit i A, E, & H, e tre altre
, F, e D, le composte propor-
oni di A ad H, e di K a D si dimostreranno, co-
e sopra, essere simili trà loro. Il che bisogna-
&c.

A 6	K 24
B 3	F 12
E 4	C 16
H 2	D 8

CO-

COROLLARIO.

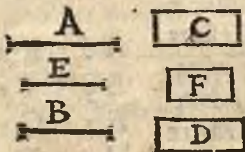
Similmẽte la proporzione composta di maggiori proporzioni con ordine perturbato, sarà maggiore di quella, che d'altre, e tante minori proporzioni è composta. Imperciòche le proporzioni composte, ò ordinatamente, ò perturbatamente sono le medesime trà loro: e però la *f* proporzione ordinata se sarà maggiore di qualche altra, ancora la perturbata sarà maggiore di quella stessa proporzione.

f Corol. 2. della pr. 19. di questo.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XXI.

Se da proporzioni simili si sottrranno, ò ordinatamente, ò perturbatamente proporzioni simili; le proporzioni rimanenti saranno ancora simili.



Sia la proporzione di qualsiuoglia quantità A a B, come C a D, e da queste proporzioni simili, ouero medesime, si leuino via altre medesime proporzioni ordinatamente nel primo luogo, di modo che A stia ad E, come C ad F. Dico le rimanenti proporzioni di E a B, & F a D esser le medesime. Perche *a* inuertendo come ad

a prop. 9. di questo.

A, così stà F a C, e come A a B, così era C a D. unque *b* componendo ordinatamente come B, così stara F a D. *b prop. 19 di questo.*

Si leuino via perturbatamēte, secondo luogo, le medesime, nodo che stia A ad E, come F D. Dico le rimanenti proporzioni di E a B, e di C ad F essere medesime. Perche *c* inuertendo come B ad A, così sta D a C, e come A ad E, sì stà F a D; adunque *d* per la composizione perturbata come B ad E, così stà F a C, & inuertendo *e* come E a B, così sta C ad F. Il che bisognaua dimostrare. *c prop. 9. di questo.* *d prop. 20 di questo.* *e prop. 9. di questo.*

A	8	C	4
E	4	F	6
B	6	D	3

COROLLARIO.

Dalle trè precedenti proposizioni si caua, che alcuna proporzione sarà composta di altre proporzioni, ella eziandio è composta delle medesime proporzioni disposte in qualsiuoglia ordine.

Poiche se la proporzione di A a B frapposti termini C, D, & E à cōposta delle proporzioni, α, B, γ, λ, la medesima sarà composta delle medesime proporzioni, ma con ordine perturbato B, α, λ, γ

A A
C αα F β
D β G αα
E γ H λ
B λ B γ

frap·

frappofti altri termini F,G, & H. Auuengaci
f prop. 20. di questo. *f* come stà A a D così stà A a G: e di nuouo g co-
me stà D a B, così stà G a B. Adunque *h* A a B s
g prop. 20 di questo. come A a B di quell'altro ordine.

h prop. 19 di questo.

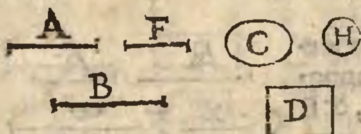
PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XXII.

Eucl. 24. del 5. *Se due quantità aueranno la medesima proporzion a due conseguenti, & alle stesse due altri anteced. sian proporzionali: le somme de gl'antecedenti Omologhi alle medesime consegnenti, aueranno cor' esse la medesima proporzione.*

STia A a B come C a D, & F alla medesima stia come H alla medesima D. Dico che due antecedenti A, & F insieme anno a B la m- desima proporzione, che le due C, & H insie a D. Perche come stà F a B, così stà H a D. Adun-

a prop. 9. di questa. que *a* inuerten come B ad F, così stà D ad H. Ma A a B stà come C a D, e pe *b* ordinatame



b prop. 19 di questo. componendo come stà A ad F, così stara C ad
c prop. 14 di questo. e *c* comparando le somme de' termini a i con- guenti A, & F ad F staranno come C, & H ad Ma F a B staua come H a D. Adunque di nuo
d prop. 19 di questo. *d* per la ordinata composizione AF insieme ran-

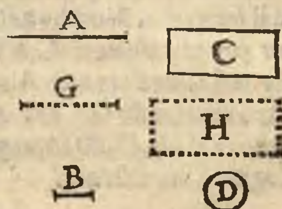
anno a B, come HC insieme prese a D. Il che bisognaua &c.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA XXIII.

e saranno quattro quantità di tal condizione, che prese quali si vogliano altre proporzionali commensurabilmente alle conseguenti siano insieme maggiori, ò insieme eguali, ò insieme minori delle antedenti ordinatamente; quelle quattro quantità saranno proporzionali.

Sieno quattro quantità, la prima A, la seconda B, la terza C, e la quarta D, e di più la quinta G a B abbia la medesima proporzione commensurabile, che ha la sesta H alla D, e sieno le dette proporzioni commensurabili qualunque si vogliano delle infinite, che si possono assegnare; e ogni volta che la G è eguale alla prima A, parimente sia la H eguale alla terza C, e ogni volta che la G è minore di A, sia anche la H minore di C, e ogni volta che la G è maggiore di A, si ritrovi sempre la H maggiore di C, e ciò mai sempre si verifichi in tutte le infinite proporzionalità commensurabili. Dico che la prima A alla se-



conda B ha la medesima proporzione, che la te za C alla quarta D. Se questo è falso la A alla auerà maggiore, ò minor proporzione, che no hà la C alla D. E sia nel primo luogo la propor
a *Dif. 10. di questo.* zione maggiore se è possibile. Adunque *a* la pro porzione della A alla B sarà maggiore, e la pro porzione della C alla D non sara maggiore del la medesima proporzione commensurabile (la quale s'intenda, che abbia la G alla B, & la H al la D) & la A sara maggiore di G, e C non sar maggiore di H. Laonde due quantità G, & H che anno la medesima proporzione commen surabile alle due conseguenti B, e D, non saran no insieme minori delle antecedenti, il che è con tra il supposto. Non hà adunque la A alla B mag gior proporzione di C a D. Col medesimo di scorso si dimostrerà la A alla B non auer mino
b *Dif. 12. di questo.* proporzione di C a D. Adunque *b* le quattro quantità A, B, C, D sono proporzionali. Il che bisognaua dimostrare.



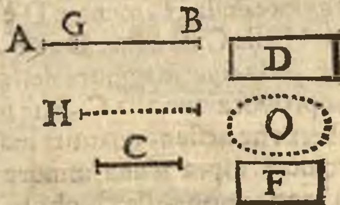
PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XXIV.

Se saranno quattro quantità di tal condizione, che prese due altre proporzionali alle conseguenti siano insieme maggiori, ò insieme minori delle antecedenti, in maniera, che l'eccesso, ò il diffetto della prima sia minore di qualsiuoglia dato; saranno dette quantità proporzionali.

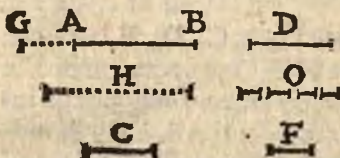
Sieno quatto quantità AB, C, D, F tali, che presene due altre H,& O proporzionali alle conseguenti C, & F sieno insieme maggiori, ò insieme minori delle antecedenti AB, e D, di modo, che l'eccesso, ouero il difetto di H dalla prima AB sia minore di qualunque assegnabile quantità delle infinite, che proporre si possono. Dico che AB a C hà la medesima proporzione, che ha D ad F. Perche qualsiuoglia quantità minore di AB, quale è la GB, è necessario, che



manchi da quella di qualche difetto, quale è AG; si suppongono così la H minore della AB, come la O minore della D, di modo che il difetto

 del-

della H dalla prima AB sia minore di qualunqu
assegnabile quantità, adunque il difetto di H dal
la prima AB potrà esser minore di AG; e perciò
GB sarà minore di H, mentre D si suppone mag
a prop. 8. di questo. giore di O: Ma la H alla C stà come O ad F, a adú
que la GB (cioè qualsiuoglia quantità minore d
AB) auera minor proporzione alla C, che non
ha la D alla F. Si che nessuna quantità minor
di AB auerà a C la medesima proporzione, ch
hà D ad F. Nel secondo luogo perche qualsiuo
glia maggiore d
AB, quale è G
auanza quella
qualche eccesso
A. Et le H, & O
suppongono infi
me maggiori dell
antecedenti cõta



legge, che l'eccesso della H dalla prima AB s
minore di qualsiuoglia dato GA, perciò GB sar
maggiore della H, mentre D è minore della O
b prop. 8. di questo. Et la H alla C stà come D ad F, b adunque G
(cioè qualunque maggiore della AB) aurà mag
gior proporzione alla C, che non l'hà la D all
F: Perilche nessuna quantità maggiore della AB
si come di sopra niuna minore auerà la medesi
c Ass. 3. di questo. ma proporzione alla C, che ha la D ad F, & c si
troua pure in natura quella quantità, che sta alla
seconda C, come la terza D alla quarta F. Adun
que la medesima AB alla C auerà la medesima
proporzione, che hà la D ad F. Il che si era pro
posto &c. SCHO-

SCHOLIO.

Oltre à questi vi è vn'altro modo da conoscer le proporzionali molto vsato da Euclide, & Archimede, ed è questo. Se d' vna quantità, che auanzi la prima di vn' eccesso minore di qualunque assegnabile la proporzione, ch'ella hà alla seconda sia maggiore di vna data proporzione, e parimente d'vna quantità che manchi dalla prima di vn defetto minore di qualunque assegnabile la proporzione, ch'ella hà alla seconda, sia minore della stessa data proporzione, la prima alla seconda aurà la proporzion data. Perche si suppone l'eccesso, ò'l defetto dalla prima poter esser minor di qualunque assegnabile quantità, e qualsiuoglia quantità maggiore della prima l'auanza di qualche eccesso, il quale sarà minore di qualche altra quantità. Adunque qualsiuoglia quantità, cioè tutte le maggiori della prima aueranno maggior proporzione alla seconda, che non è la proporzion data; e però niuna quantità maggiore della prima, auerà alla seconda la stessa proporzione data. Similmente niuna quantità minor della prima aurà alla seconda la stessa proporzione data. Adunque necessariamente la stessa prima aurà alla seconda la stessa proporzione data.

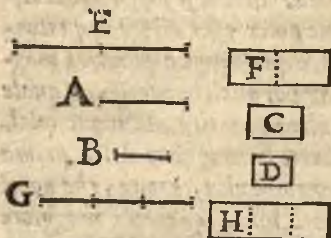


PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA XXV.

Euclid.8. del 5.

Delle equimultiplici di due antecedenti, e di due conseguenti, se la multiplice della prima eccederà la multiplice della seconda, e la multiplice della terza non eccederà la multiplice della quarta: allora la prima alla seconda auerà maggior proporzione, che la terza alla quarta.



Sieno quattro quātità A, B, C, e D, e prese la E, & F equimultiplici delle antecedenti A, e C, e prese eziandio la G, & H equimultiplici delle conseguenti B, e D, e sia E multiplice della prima maggiore di G multiplice della seconda, & F multiplice della terza, non sia maggiore di H multiplice della quarta. Dico A a B auer maggior proporzione, che non ha C a D. Perche E è maggiore di G, & F non maggiore di H. Adunque *a* E a G ha maggior proporzione, che nō hà F ad H. Ma *b* A ad E stà come C ad F, essendo medesima parte di loro. Adunque *c* A a G hà maggior proporzione, che non ha C ad H. E di più G a B

a *Ass. 6. di questo.* b *Dif. 8. di questo.* c *Corol. 2 della pr. 19. di questo.*

G a B stà come H á D, essendo l'antecedenti equimultiplici delle conseguenti; e perciò A a B ha maggior proporzione, che non ha C a D. Il che bisognaua &c.

d *Dif. 8. di questo.*
e *Corol. 2 prop. 19. di questo.*

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XXVI.

Se la prima quantità alla seconda auerà maggior proporzione, che la terza alla quarta, vi saranno tali equimultiplici dell' antecedenti, & tali equimoltiplici delle conseguenti, delle quali la multiplice della prima ecceda la multiplice della seconda, ma la multiplice della terza non ecceda la multiplice della quarta.

Eucl. la conuersa della Dif. 8. del lib. 5.

Abbia AB a C maggior proporzione, che D ad E. Dico esser possibile ciò che vien proposto. Perche AB a C há maggior proporzione, che D ad E. Adunque alcuna quantità minore della prima AB auerà la medesima proporzione alla seconda C, che hà la terza D alla quarta E; ella si chiami AF, e si prendano delle quantita AF, AB, e D le equimultiplici MI, MK, & N, con tal patto, che KI loro

a *prop. 5. di questo.*

differenza sia maggiore di C. Di poi si prendano le equimultiplici RS di C, & X dell' altra E, con questa legge però, che RS sia eguale, ò sia la minima di tutte quelle, che eccedono MI, di modo, che l'eccesso sia minore di vna sua parte RV, ouero a C, e perciò l'eccesso di RS sopra MI sarà minore di IK, la quale è stata fatta maggiore di C. Onde MK sara maggiore di RS, & MI non sarà maggiore della medesima RS. Dee adesso in queste equimultiplici dimostrarsi, che mentre MK è maggiore della RS, la N, ò è eguale, ò minore di X. Perche come stà AF a C, così stà D ad E; e le due MI, & N si son prese equimultiplici delle antecedenti AF, e D, e similmente le due RS, & X equimultiplici delle conseguenti C, & E. Adunque *b* come MI ad RS, così stà N ad X. Per la qual cosa, si come *c* MI non è maggiore di RS, così ancora N sarà eguale, ò minore di X. Ma MK si è dimostrata maggiore di RS. Adunque quando la MK è maggiore di RS, la N non è minore di X. Il che si era proposto.

b *Corol.* 1 *prop.* 19. *di questo.*
c *Corol. della pr.* 16. *di questo.*



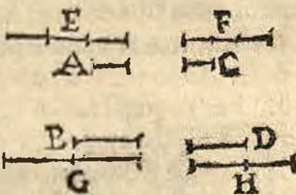
PRO-

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XXVII.

Se saranno quattro quantità di tal condizione, che le equimultiplici delle antecedenti dalle equimultiplici delle conseguenti, sia qualunque multiplicazione del si vuole, l'vna dall'altra, ò insieme mancano, ò sono insieme egnali, ò insieme eccedono, se si prenderanno quelle, che si corrispondono: le dette quattro quantità saranno proporzionali. Euclid. Diffin. 6. del 5.

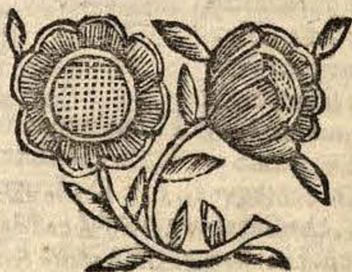
Sieno le quattro quantità A, B, C, e D, e siano E, & F qualunque equimultiplici delle anteceden-ti A, e C delle infinite equimultiplici, che assegnare si possono: e



siano parimente G, & H qualunque equimultiplici, cioè vagliono per le altre infinite equimultiplici delle conseguenti B, e D; & ogni qualunque volta, che E è maggiore di G, sia sempre F maggiore di H; & ogni volta, che E è eguale a G, sia parimente F eguale ad H, & in qualunque multiplicazione E è minore di G, sia sempre F minore di H. Dico la A alla B auere la medesima proporzione che há la C alla D. Poiche, se ciò non è vero, la A alla B auera, ò maggiore, ò mi-

a *prop.* 26 *di questo.* minor proporzione di C a D; & in *a* qualunque caso, se la moltiplice E eccedera G, qualche volta F non eccedera H: ouero se la F eccede la H in qualche multiplicazione, E nõ eccedera la G: le quali cose son false, e contra il supposto. Adunque la A alla B non può auere maggiore, ò minor proporzione di quella, che ha la C alla D. b *Dif.* 1 *di questo.* Per la qual cosa le *b* A, B, C, e D saranno proporzionali. Il che bisognaua dimostrare &c.

Fine del Libro terzo.



LI-

LIBRO QVARTO

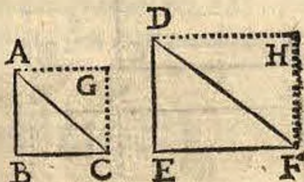
Degli ſpazi proporzionali.

DIFFINIZIONI.

I.

SI chiamano triangoli, ouero parallelogrammi Reciproci, quando due lati intorno a vn'angolo d'vna figura ſaranno due eſterni termini, & i due lati intorno à vn'angolo dell' altra figura ſaranno due mezzi di quattro proportionali.

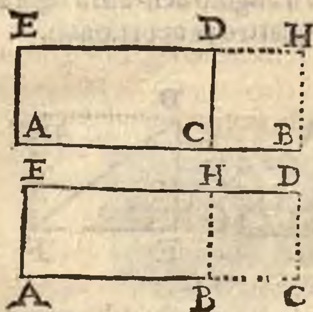
Eſempi grazia i due triangoli ABC, DEF, ouero i due parallelogrammi BG, EN ſarãno reciproci ſe AB ad ED ſtarà come FE à CB; atteſoche in queſta maniera l'angolo B della figura ABC ſarà contenuto dalla prima AB, e dalla quarta CB; e l'angolo E della figura DEF ſarà contenuto dalla ſeconda DE, e dalla terza EF delle quattro proporzionali.



De

I I.

De i parallelogrammi applicati sopra qual che retta linea, quello si dice mancante, il qual non occupa tutta la linea: e quello si dice ecce dente, il quale occupa vna linea retta maggior di quella sopra la quale è applicato: E l'eccess ouero il diffetto si dice la parte, ò pure lo slungamento del medesimo parallelogrammo applicato, il quale è stato descritto sopra il diffetto, ouero eccesso della linea data.



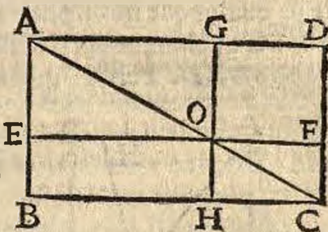
Esempi grazia il parallelogrãmo AD applicato sopra la retta AB si dice mancante quando il suo lato AC non occupa tutta la linea AB; e si dice eccedente quando AC maggiore di AB. E si dice diffetto nel primo caso, ouero eccesso nel secondo il parallelogrammo CH.

I I I.

Se dal medesimo punto del diametro d'vn parallelogrammo saranno tirate due rette parallele a lati dello stesso parallelogrammo, i parallelogram-

ogrammi, che dal diametro son tagliati, si chiamino costituiti intorno al diametro, e quei due parallelogrammi, che non son tagliati dal diametro, si chiamino parallelogrammi del compimento.

Se per essempio nel parallelogrammo BD sono tirate per il punto O preso nel suo diametro AC due rette HO G parallela al lato DC, ouero ad AB, & FOE parallela al lato CB, ouero DA, i parallelogrammi BD, HF, & EG si chiamino costituiti intorno al diametro, e i due parallelogrammi DO, e BO i quali dal diametro nō son tagliati, sien detti parallelogrammi del Compimento.



PROPOSIZIONE I.

TEOREMA I.

I triangoli, & i parallelogrammi egualmente alti anno trà loro la medesima proporzione, che le basi; E se staranno trà loro come le basi, aueranno le altezze eguali. Eucl. 1. del 6.

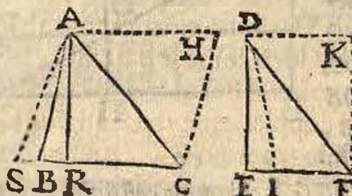
Sienò primamente i due triangoli ABC, DEF egualmente alti, cioè le perpendicolari AR, e DE tirate sopra le base delle sommità A, e D fieno

sieno trà loro eguali. Dico il triangolo ABC a triangolo DEF auere la medesima proporzio-

a prop. 28. del 1. ne, che la base BC alla base EF, si *a* seghi EF in quanta si voglia moltitudine di parti eguali, l'vna delle quali sia EI, & in CB si prenda la SC, la quale sia qualunque moltiplice della stessa EI, sarà

b Dif. 3. del 3. *b* la SC qualunque parti della EF: e si congiungano SA, ID. Perche quante volte la base *c* EI

c Corol 2. della pr. 32. del libro 1.



misura la base EF, tante volte il triãgolo EID misura il triangolo egualmente alto DEF; e quante volte EI

d L'istesso. *d* misura CS, tante volte il triangolo DEI misura l'egualmente

e Dif. 6. del 3. alto triangolo ASC. Adunque *e* il triangolo ASE è ancor egli parti medesime del triangolo DEF, si come SE è parti dell' altra EF. Sono adunque quattro grandezze, la prima la retta BC, la seconda la retta EF, la terza il triangolo ABC, la quarta il triangolo DEF, e due altre, cioè la base SE, & il triangolo ASE sono qualunque parti medesime delle consequenti, cioè della retta EF,

f Dif. 8. del 3. e del triangolo DEF, cioè *f* a quelle anno qualunque proporzione medesima commensurabile, e

g prop. 32 del 1. quante volte SC è eguale alla prima BC, necessariamente *g* il triangolo ASC sarà eguale alla terza, cioè all'angolo ABC, e quante volte la SC è

h Della prop. 32. del. 1 maggiore della BC, tante volte *h* ASC è maggio-

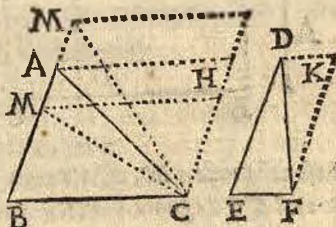
giore di ABC, e quando SC è minore di BC, sempre mai ASC sara minore di ABC. Adunque *i* la base BC, primo termine al secondo EF, hà la medesima proporzione, che il triangolo ABC terzo termine, al triangolo DEF quarto termine. Il che bisognaua dimostrare.

i prop. 23. del 3.

Sieno secondariamente i parallelogrāmi BH, EK della medesima altezza. Dico che sono proporzionali alle base. Tirati i diametri AC, DF, i triangoli ABC, DEF saranno egualmente alti, e perciò *k* staranno tra loro come le base BC, EF: ma si come il triangolo *l* ABC al triāgolo DEF, così stá il doppio al doppio, cioè il parallelogrāmo *m* BH al parallelogrammo EK. Adunque il parallelogrammo *n* BH al parallelogrammo EK, stara come la base BC alla base EF, come bisognaua prouare.

k Dalla 1. parte di questo.
l prop. 11. del 3.
m pro 26 del 1.
n prop. 7. del 3.

Terzo stia il triangolo ABC al triangolo DEF, ò pure il parallelogrāmo AH al parallelogrāmo EK, come la base BC alla base EF. Dico l'altezze de' triangoli, ouero de' parallelogrammi essere eguali. Se ciò non è vero, si seghi il triangolo, ò parallelogrammo MB maggiore, ò minore di ABC, che abbia l'altezza eguale à quella di DEF. Adunque *o* lo spazio MBC allo spazio della medesima spezie DEF, starà



o per la 1. e 2. part. di questa prop.

ſtarà come la baſe BC alla baſe EF: ma come BC ad EF, così ſtaua ABC a DEF. Adunque i tri-
p prop. 7. del 3. angoli, p ouero i parallelogrammi MBC, & AB- anno la medeſima proporzione allo ſteſſo trian-
q prop. 4. del 3. golo, ò parallelogrammo DEF: e perciò q MBC & ABC ſono eguali la parte, e'l tutto, che è im- poſſibile. Adunque nõ altra altezza di quella del- lo ſpazio ABC è eguale all' altezza dello ſpazio DEF. Onde è manifeſto ciò che ſi propoſe.

SCHOLIO.

Da queſta proporzione facilmente ſi cauano le prime trè propoſizioni, che nel ſecondo libro troppo proliſſa- mente dimoſtrò Euclide.



Eucl. 1. del 2.

Sia primamente la retta linea A non ſegata, e la BC ſia ſegata in D. Dico il parallelogrammo rettangolo cõtenuto dalla A, e da BC (cioè la baſe del quale è BC, e l'altezza intorno all'angolo retto è A) eſſere eguale à i rettangoli parallelogrammi contenuti dalle A, e BD, e dalle A, e DC. Perche tutti queſti parallelogrammi rettangoli ſono egualmente alti, auendo commune l'altezza miſurata dalla retta linea A. Adunque a ſtaranno trà loro come le baſe: ma le baſe BD, DC inſieme preſe, ſono eguale alla baſe BC: ſi che i rettangoli b fatti dalla BD in A, e dalla DC in A inſieme preſi, ſono eguali al rettangolo fatto dalla

a prop. 1. di queſto, e prop. 22. del 3.

b Corol. della pr. 15. del 3.

baſe

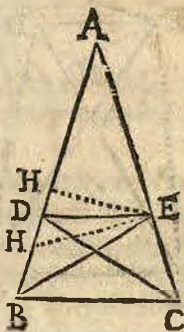
base BC nell'altezza A. Il che bisognaua &c. Si supponga nel secondo luogo la non segata A eguale à tutta BC, per la medesima ragione il parallelogrammo fatto dall'altezza A in BC, ouero dalla BC in CB, cioè il quadrato di BC sarà eguale à due rettangoli dell'altezza A, ouero BC in BD, e di BC in CD insieme presi. Terzo si supponga la non segata A eguale alla porzione DC, sarà di nuouo il parallelogrammo di A, ouero DC in BC eguale à due rettangoli di A, ouero di CD in BD, e di DC in DC, cioè del c quadrato della stessa DC. *Euclid. 2. del 2. a pr. 24. del 1.* *Euclid. 3. del 2.* c prop. 34 del 1.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II.

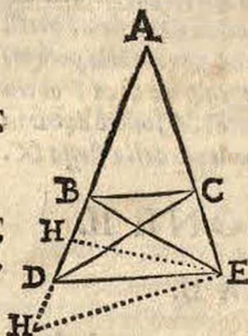
La retta linea parallela alla base del triangolo sega proporzionalmente i di lui lati. E la retta segante proporzionalmente i lati del triangolo, è parallela alla base di quello. *Euclid. 2. del 6.*

Sia il triangolo ABC, e la retta DE parallela alla base BC seghi i di lui lati in D, & E. Dico BD a DA auer la medesima proporzione, che la CE alla EA. Si congiungano le rette DC, EB. Perche i due triangoli DBE, ECD anno la medesima base DE, e DE, BC sono parallele tra loro. Adunque a sono tali triangoli trà lo- a prop. 32 del 1.



b prop. 5. del 3.
c prop. 1. di questa.

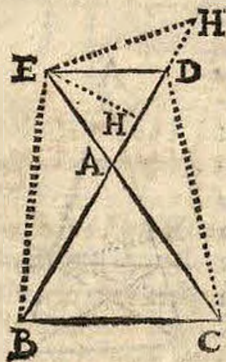
ro eguali: e perciò *b* al medesimo triãgolo AD anno la medesima proporzione. Ma il *c* tria golo BED al triangolo DEA ha la medesim proporzione, che la base BD alla base DA(aui



d prop. 7. del 3.
e prop. 1. di questo.

ga che la perpendicolar tirata dal punto E sopra retta AB, è all' altezza co mune de'triangoli DEB, DEA). Adunque *d* il tria golo DCE al triangolo AE stà come BD a DA. e stando di più il triangol CD*E* al triangolo *E*DA come la base C*E* alla bas *E*A, perche sono della me desima altezza. Adunqu *f* come BD a DA, così sta C*E* ad *E*A. Il che n primo luogo bisognaua dimostrare.

f prop. 7. del 3.



g Corol. prop. 16. del 1.
h 1. parte di questo.
i prop. 7. del 3.

Stia secondariamente BD à DA, come G*E* ad *E*A Dico D*E* esser parallela al la base BC, se ciò non è ve ro, sia *g* *E*H parallela all base BC. Adunque come C*E* ad *E*A, così stará BH ad HA: ma come C*E* a *E*A, così staua BD a DA per questo come *i* BH a HA, così sta BD a DA. comparando nel primo ca to le somme, ouero le diffe

ren;

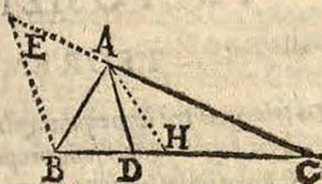
enze de'termini a i conseguenti, nel secondo, e terzo caso, starà BA ad AD, come BA ad AH. Laonde k AD, & AH saranno eguali, la parte è il tutto, che è falso. Non adunque la EH, ma così la ED è parallela alla base BC. Il che bisognaua prouare. k *prop. 4. del 3.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III.

Vna retta linea segante in parti eguali l'angolo alla cima d'vn triangolo, segar à la base nella medesima proporzione de'lati, di modo, che gl'Omologhi sieno confinanti. E se la base sarà segata nella medesima proporzione de' lati, sarà l'angolo alla cima segato per mezzo. *Eucl. 3. del 6.*

NEl triangolo ABC faccia la retta AD gli angoli DAB, DAC eguali trà loro. Dico BD a DC esser come BA ad AC. Producasi la



EA, finche diuenga *a* EA eguale a BA, e si congiunga EB. Perche *b* gli angoli E, & ABE opposti a lati eguali EA, BA, sono trà loro eguali. Adunque *c* l'angolo esteriore CAB è doppio dell'angolo ABE: ma l'angolo CAB è doppio ancor egli dell' angolo DAB. Adunque i due angoli DAB, a *prop. 3. del 1.* b *prop. 6. del 1.* c *prop. 18 del 1.*

DAB, & EBA alterni sono eguali, e perciò *d* la AD è parallela alla EB, base del triãgolo CEB. Laonde *e* BD a DC, stà come EA, ouero *f* come la sua eguale BA ad AC. Come bisognaua &c.

d prop. 16 del 1.
e prop. 2. di questo.
f prop. 3. del 3.

Stia nel secondo luogo BD a DC, come BA ad AC. Dico che la retta DA sega l'angolo BAC in parti eguali; se ciò non è vero, vn' altra retta HA seghi in parti eguali l'angolo BAC; il perche come stà *g* BA ad AC, così starà BH ad HC: ma come BA ad AC, così staua BD a DC. Adunque *h* come BH ad HC, così stà BD a DC. E comparando le somme alle consequenti, BC *i* sarà ad HC, come BC a CD, e perciò *k* CH, e CD sono eguali la parte, e'l tutto, il che è falso. Adunque non altra retta linea, fuor che la DA, sega in parti eguali l'angolo CAB. Il che bisognaua dimostrare &c.

g Per la 1. parte di questa prop.
h prop. 7. del 3.
i prop. 14. del 3.
k prop. 4. del 3.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA IV.

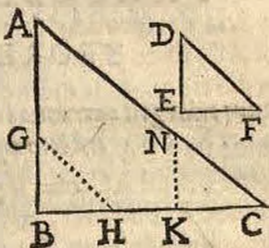
Eucl. 4. del 6.

De triangoli trà loro equiangoli, i lati che sono intorno à gli angoli eguali sono proporzionali, de' quali gli Omologhi sottendono gli angoli eguali. Cotal sorte de' triangoli si chiamino simili trà loro.

NE triangoli ABC, DEF sieno i due angoli A, e D eguali tra loro, e parimente i due angoli B, & E eguali: Si che *a* i terzi angoli C, & F saranno eguali, essendo i compimenti a due retti

a Dalla prop. 18. del 1.

etti nell'vno, e l'altro triangolo. Dico essere AB a BC come DE ad EF, e BC a CA come EF FD, e CA ad AB come FD a DE (attesoche in questa guisa i lati Omologhi, cioè gli antecedēti della proporzionalità sottēdono gli angoli eguali) si seghino *b* GB eguale a DE, & NC eguale a DF, e *c* si tirino GH parallela alla AC, e la NK parallela alla AB. Perche all'angolo



b *prop. 3. del 1.*

c *Corol. della pr. 16. del 1.*

medesimo A è eguale l'angolo D per il supposto, e BGH, in virtù delle parallele GH, AC è eguale al medesimo angolo A. Adunque gli angoli BGH, & D sono eguali, & erano eguali gli angoli B, & E, e i lati agiacēti BG, DE erano eguali. Perciò *e* BH è eguale ad EF. Con vn simile discorso si mostrarà nel triangolo NKC, essere KC eguale ad EF. Di poi perche GH è parallela ad AC. Adunque *f* AB a BG stara come CB a BH. E permutando AB *g* a BC stara come GB a BH; e BG, e BH sono eguali a DE, & EF. Si che come AB *h* a BC, cosi sta DE ad EF In oltre a cagione delle parallele AB, NK, *i* starà BC a CK, come AC a CN, e permutando *k* BC a CA, starà come KC a CN, ouero *l* come EF a FD (per esser queste eguali a quelle). Ed essendo AB a BC, come DE ad EF, e stando BC a CA, come EF ad FD. Adunque (per la *m* composizione ordinata)

d *prop. 15 del 1.*

e *prop. 25 del 1.*

f *prop. 2. di questo.*

g *prop. 12 del 3.*

h *prop. 3. e 7. del 3.*

i *prop. 2. di questo.*

k *prop. 12 del 3.*

l *prop. 3. e 7. del 3.*

m *pr. 19. del 3.*

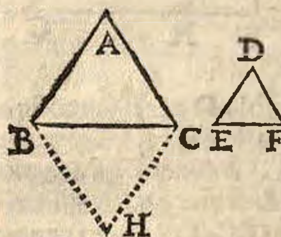
AB ad AC starà come DE a DF. Il che bisognaua dimostrare &c.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA V.

Euclid. 5. del 6.

Se due triangoli aueranno i lati proporzionali, saranno trà loro equiangoli.



NE triangoli ABC DEF stia AB a BC come DE ad EF, e BC a CA stia come EF ad FD e CA ad AB stia come FD a DE. Dico che i triangoli sono equiangoli. Si faccia l'angolo *a* HBC eguale all'angolo E, & l'angolo HCB si faccia eguale all'angolo F. Sarà adunque *b* l'angolo terzo H eguale all'angolo D. Laonde ne' triangoli equiangoli BCH, EFD *c* starà HB a BC, come DE ad EF; ma come DE ad EF, così staua AB a BC. Adunque *d* HB, & AB alla medesima BC, anno la medesima proporzione, e perciò *e* HB, & AB sono eguali trà loro. Per la medesima ragione HC sarà eguale ad AC, & è BC base commune. Adunque *f* gli angoli A, & H saranno eguali trà loro: ma era l'angolo D eguale all'angolo H: per questo i due angoli A, e D sono eguali trà loro. Per la medesima

a prop. 24 del 1.

b Dalla prop. 18. del 1.

c prop. 4. di questo.

d prop. 7. del 3.

e prop. 4. del 3.

f prop. 7. del 1.

ſima ragione gli angoli ABC, & E ſaranno trà loro eguali. Laonde i triangoli ABC, DEF ſono equiangolo. Il che biſognaua &c.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI.

Se due triangoli aueranno vn' angolo eguale ad vn' angolo, & intorno à gli angoli eguali ſaranno i lati proporzionali: i triangoli ſaranno ſimili. — *Eucl. 6. del 6.*



NE' triangoli ABC, DEF ſieno gli angoli A, e D eguali, e come ſtà BA ad AC coſi ſtia DE a DF. Dico i triangoli eſſere ſimili. Si ſeghi *a* AG eguale a DE, e HA ſi faccia eguale à DF, e ſi congiunga GH, & eſſendo gli angoli A, e D eguali i due triangoli *b* AGH, DEF ſaranno equiangoli, & equilateri trà loro. Ma BA ad AC, ſtà come ED a DF, ouero come *c* GA ad AH (in virtù dell'egualità). Adunque *d* permutando BA ad AG, ſtarà come CA ad AH; e perciò *e* GH ſarà parallela a BC. Onde *f* l'angolo B ſarà eguale all'angolo AGH; ma al medeſimo angolo AGH era eguale l'angolo E. Adunque gli angoli B, & E ſaranno eguali trà loro: ma erano prima eguali gli angoli A, e D; perciò g i triangoli ABC, DEF ſono trà di loro equiangoli, e ſimili. Il che biſognaua &c.

a *prop. 3. del 1.*
b *prop. 4 del 1.*
c *prop. 3. del 3.*
d *prop. 12 del 3.*
e *prop. 2. di queſto.*
f *prop. 15 del 1.*
g *Della prop. 4. di queſto.*

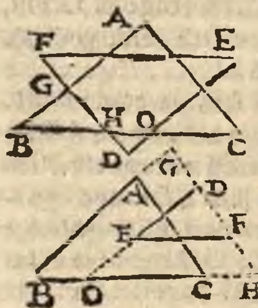
PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VII.

Eucl. 32. del 6.

Se in due triangoli due lati saranno proporzionali à due lati, di modo che gli Omologhi sieno paralleli trà loro, e i due primi sien volti verso le medesime parti, doue son volti i due secondi, ouero verso le parti opposte: i triangoli saranno simili, e le base parallele, ouero poste in diritto. E se i tre lati saranno paralleli à tre lati ad vno ad vno, i triangoli saranno simili.

NE due triangoli ABC, DEF stia nel primo luogo BA ad AC, come ED a DF, e BA, e DE sieno equidistanti, come anche AC, e DF, & i due lati AB, AC dal punto A sien distesi verso le medesime parti, alle quali dal punto D riguardano le DE, DF, ò pure verso le parti opposte. Dico i triangoli ABC, DEF essere simili, e le base BC, & EF esser parallele, ouero poste in diritto: perche le due rette BA, e BC segano vna delle parallele AC, segarãno ancora *a* l'altra DF la seghino allungata, se fa di mestieri, ne' punti G, & H. Parimente CB, che sega AB,



a Dalla prop. 29. del 1.

AB, feghi ancora la DE parallela a quella nel punto O. E perche la retta GH è parallela alla base AC del triãgolo ABC. Adũque *b* il triangolo BGH è equiangolo al triangolo BAC. E perciò come sta BA ad AC, cosi stara BG a GH. Di più perche DO è parallela alla GB, base del triangolo HGB, starà parimente OD a DH, come BG a GH; e perciò *c* OD a DH, stara come BA ad AC: ma si supponeua, che ED a DF stesse come BA ad AC. Adunque *d* OD a DH starà come ED a DF, e gli angoli ODH, & EDF sono eguali alla cima, ouero l'vno, & il medesimo (essendo che DE, OD sono in diritto, e così DF, HD, e le rette DE, e DF risguardano alle medesime parti, alle quali sono indirizzate le due rette AB, & AC, ouero DO, e DH, opure tendono alle parti opposte per l'ippotesi). Adunque i due *f* triangoli ODH, EDF sono tra loro equiangoli, & anno i lati proporzionali: e perciò g la base EF è parallela ad OH, ouero a BC; ò *h* saranno poste in diritto, se elleno si toccano: ma il triangolo ABC era equiangolo al triangolo DOH. Adunque i triangoli ABC, e DEF sono tra loro equiangoli, e perciò *i* simili.

b *Dalla prop. 6. di questo.*
c *prop. 7. del 3.*
d *prop. 7. del 3.* e *Corol. prop. 5. del 1.*
f *prop. 6. di questo.*
g *prop. 2. di questo.*
h *Dalla prop. 17. del 1.*
i *prop. 4. di questo.*

Sieno nel secondo luogo AB, DE equidistanti, e parimente AC, DF sieno parallele, come anche BC, EF sieno parallele. Di nuouo dico, che i triangoli ABC, DEF sono simili. Imperciòche fatta la medesima costruzzione si dimostrerà, come sopra, essere il triangolo ODH simile al triangolo BAC, & è tirata la EF parallela ad OH,

base

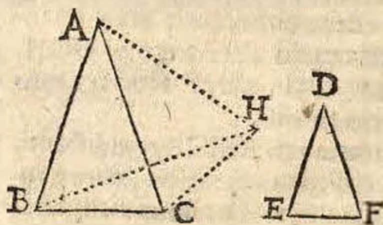
k Dalla prop.6. di questo. base del triangolo DOH. Adunque k il triangolo DEF è equiangolo al triangolo DOH, ouero al triangolo ABC. Il che bisognaua &c.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VIII.

Eucl. 7. del 6. *Se in due triangoli saranno due lati proporzionali à due lati, & i due angoli opposti à lati omologhi saranno eguali trà loro, e i due angoli opposti à gli omologhi rimanenti saranno della medesima specie, i triangoli saranno simili trà loro.*

NE triangoli ABC, e DEF abbia AB ad AC la medesima proporzione, che hà ED a DF, e gli angoli B, & E sieno eguali, che sono opposti a gli angoli omologhi AC, e DF, e i due angoli C, & F opposti a gli omologhi rimanenti sieno della medesima specie, cioè sieno amēdue acuti, ouero amēdue ottusi. Dico, che i triangoli ABC, e DEF sono

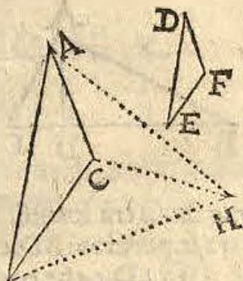


simili. Si faccia a l'angolo CAH eguale all'angolo D, e si seghi b AH eguale ad AB, e si congiunghino le rette CH, e BH. Perche le egua-

a prop.24 del 1.
b prop. 3. del 1.

li

lie BA, & HA anno alla medesimo a AC la medesima proporzione, & *E*D a DF, sta come BA ad AC. Adunque *d* AH ad AC, sta come *E*D a DF, e gli angoli CAH, e D sono eguali. Adunque *e* i triangoli ACH, & EDF sono equiangoli, e perciò gli angoli AHC, & *E* sono eguali, e parimente gli angoli ACH, & F sono tra loro eguali: ed erano gli angoli ACB, & F della medesima specie. Adunque quando l'angolo ACB è acuto, eziandio l'angolo ACH sarà acuto, e quando quello sarà ottuso, questo ancora sara ottuso: e perciò i due ACB, & ACH insieme presi, saranno, ò maggiori, ò minori di due retti: e perciò *f* le due rette BC, e CH non saranno poste in diritto, e verrà a formarsi il triangolo BCH. *E*d essendo i due angoli ABC, AHC eguali tra loro, per essere eguali al medesimo angolo *E*, e parimente *g* i due angoli ABH, & AHB essendo eguali (per essersi i lati AB, & AH fatti eguali) Adunque gli angoli composti, ouero differenziali HBC, e BHC saranno eguali tra loro; e perciò le rette *h* BC, & HC saranno eguali: ma i lati AB, & AH si fecero eguali, & AC è commune. Adunque l'angolo *i* BAC è eguale all'angolo HAC. Ma al medesimo angolo HAC era eguale l'angolo D. Laonde gli angoli BAC, e D sono tra loro



c prop. 3. del 3
d prop. 7. del 3.
e prop. 6. di questo.
f Dalla prop. 13. del 1.
g prop. 6. del 1.
h prop. 20 del 1.
i prop. 7. del 1.

egua-

k *Dalla prop. 4. di questo.*

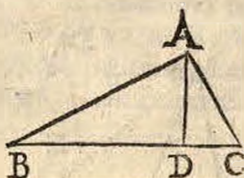
eguali: e gli angoli ABC, & *E* si posero eguali. Adunque *k* i triangoli ABC, e DEF sono simili. Il che bisognaua prouare.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA IX.

Eucl. 8. del 6.

La perpendicolare tirata dall' angolo retto del triangolo rettangolo sopra la base, lo diuide in due triangoli simili al tutto, e trà di loro, & è media proporzionale trà le porzioni della base, e fà l'vna, e l'altra parte terza proporzionale di tutta la base, e del lato confinante alla detta porzione.



NEl triangolo ABC sia l' angolo BAC retto, e dal punto A cada la perperdicolare AD sopra la base, segandola nel punto D. Dico che i triangoli BAD, ACD, e BCA sono simili trà loro; & AD è media proporzionale tra le porzioni BD, e DC, e che CB a *B*A sta come AB a *B*D, e che parimēte le tre *B*C, CA, e DC sono proporzionali. Perche ne' triangoli *BA*C, BDA l'angolo *B* è commune, e gli angoli retti *B*AC, *B*DA sono eguali. Adunque *a* il terzo angolo C è eguale all'angolo *B*AD; e perciò *b* i triangoli *B*AC, *B*DA sono simili, e intorno all' angolo commune il lato C*B* à *B*A auera la medesima

a *Dalla prop. 18. del 1.*

b *prop. 4. di questo.*

ma proporzione, che hà AB a BD. Similmente ne triangoli CAB, CDA l'angolo C è commune, e i due angoli CAB, CDA sono retti, e però eguali. Adunque i *c* triangoli CAB, CDA sono simili tra loro; e BC a CA, stá come AC a CD. Finalmente ne'trangoli BAD, ACD i due angoli BAD, e C si sono dimostrati eguali, e i due angoli retti BDA, ADC sono eguali; adunque i triangoli *d* BAD, ACD sono eziandio equiangoli trà loro, e simili, e i lati intorno a gli angoli retti eguali sono proporzionali. Si che BD a DA, stà come AD a CD. Attesoche in questa guisa gli omologhi sottendono gl'angoli eguali, & AD è la media proporzionale trà le BD DC. Laonde è chiaro quello che si propose.

c *Dalla prop. 4. di questo.*

d *Dalla stessa.*

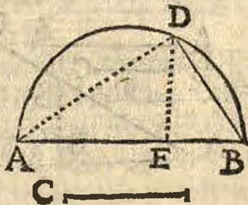
PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA I.

Date due rette linee, ritrouare la terza, ouero la media proporzionale.

Eucl. 11. 15. *del* 6.

Sieno date le due rette linee AB, e C, à queste si dee ritrouare la terza proporzionale. Si descriua sopra la maggiore AB il semicerchio ADB, nel quale si *a* applichi la BD eguale alla minore C: e dal



a *prop.* 12. *del* 2.

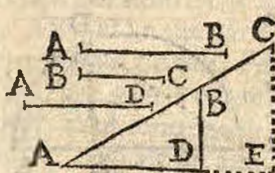
b prop. 11 del 1. dal punto D cada *b* la perpēdicolare DE, segan do la A*B* nel punto E. Dico *B*E essere la terz porzionale ricercata. Congiunta la retta AD c prop. 20 del 2. nel *c* semicerch o l'angolo AD*B* sarà retto, e dal l'angolo retto si tira la perpendicolare DE all d prop. 9. di questo. base del triangolo rettangolo AD*B*. Adunque come sta A*B* a *B*D, così sta D*B*, ouero C à *B*E; perciò la *B*E è la terza proporzionale cercata.

Deesi nel secondo luogo tra la AB, e la C ri trouare la media proporzionale. Dal diametro e prop. 3. del 1. AB *e* si seghi BE eguale a C, e *f* si eleui la perpen f prop. 10. del 1. dicolare ED, e si compisca *g* il triangolo rettan g prop. 20 del 2. golo ADB, come sopra, *h* le tre AB, BD, e BE, ouero C saranno continue proporzionali. Laon h prop. 9. di questo. de BD è la media ricercata; come era bisogno di fare.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA II.

Eucl. 12. del 6. *Date trè rette linee ritrouare la quarta proporzionale.*



DAte le tre rette li nee AB, BC, & A D, dee ritrouarsi la quarta, alla quale la A D abbia la medesima proporzione, che hà A B a BC. Si distendono in diritto la AB, e la BC, e la DA faccia con la

CA qualſiuoglia angolo, e ſi congiunga la retta BD, e ſi tiri *a* la CE parallela á BD, che ſeghi la retta AD diſteſa alle parti di D in E. Dico la DE eſſere la ricercata. Perche nel triangolo CAE è tirata la BD parallela alla baſe CE. Adunque *b* come AB à BC, così ſtà AD a DE. Il che doueca farſi.

a *Corol. pro. 16. di queſto.*
b *prop. 2. di queſto.*

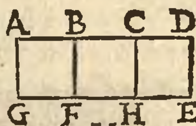
PROPOSIZIONE XII.

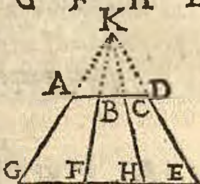
PROBLEMA III.

Segare vna data retta linea ſecondo le date proporzioni.

Eucl. 10. del 6.

DEue ſegarſi la data retta linea GE, ſecõdo le proporzioni di AB a BC, e di BG à CD. Si diſtendono in diritto le rette linee AB, BC, CD: e *a* ſi ponga AD parallela alla retta GE: e ſi congiunghino da i punti A, D, à i termini G, & E le rette linee AG, e DE. Le quali ſieno primamente parallele trà loro, e ſi diſtendano le rette *b* BF, CH parallele ad HG, ouero à DE, che ſeghino la GE ne' punti F, & H. Sara diuiſo lo c ſpazio AE ne i parallelogrãmi AF, BH, CE, ne' quali le rette GF, FH, HE ſono eguali a gli oppoſti lati AB, BC, CD, e però quelle parimente aueranno la medeſima proporzione, che anno le AB, BC, CD.





a *Corol. prop. 16. del 1.*
b *Corol. prop. 15. del 1.*
c *prop. 16 lib. 1.*

Con-

Concorrono nel secondo luogo le AG, e DI in K, e si tirino da' punti B, C a K le rette line BK, CK, che seghino la GE in F, & H. E perch GF è parallela alla base AB. Adunque d i trian goli AKB, e GKF sono simili; e perciò come BK ad FK, così sta AB a GF. Per la medesima ragio ne, come sta la medesima BK alla medesima FK così sta la BC ad FH: e così ancora dimostrera si la CD ad HE. Laonde e permutando com AB a BC, così starà GF ad FH, e come BC a CD così stara FH ad HE, per la qual cosa si è fatt quel che si cercaua.

d *Dalla prop 6. di questo.*

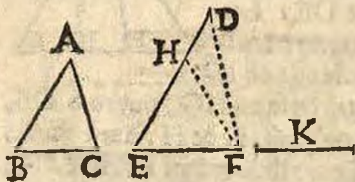
e *prop. 12. del 3.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA X.

Se due triangoli, ouero due parallelogrammi aueran no vn angolo eguale ad vn' angolo; haueranno la proporzione composta delle proporzioni de i lati, quali comprendono gli angoli eguali.

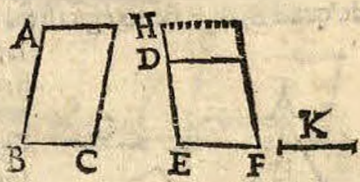
Eucl. 23. del 6.



SIeno i due tri angoli, ouero i parallelogram mi ABC, DEF, gl'angoli de' qua li B, & E sieno e guali tra loro. Dico la figura ABC alla figura DEF (comparã do mai sempre quelle che sono della medesima spe-

specie, cioè i triangoli tra di loro, e i parallelogrammini tra di loro) auere la proporzione composta della proporzione del lato BC ad EF, e della proporzione del lato AB al lato DE. Si faccia *a* EF a K, come AB à DE, e nel lato eleuato DE, *b* si seghi EH eguale al lato eleuato AB dell'altra figura, e si compisca il triangolo, ouero il parallelogrāmo HEF Perche se intenderemo da i termini A, H cadere linee rette perpendicolari sopra le basi BC, & EF, formaranno due triangoli rettangoli, ne'quali l'angolo B è eguale all'angolo E, e gli eguali lati AB, HE, sottendono gli angoli retti. Adunque *c* gli altri lati, cioè le perpēdicolari tirate da A, H sopra le basi BC, & EF saranno eguali fra loro, e però *d* la figura ABC alla figura della medesima specie HEF, e della stessa altezza, auerà la medesima proporzione, che la base BC alla base EF. Ed è la figura FHE alla figura della medesima specie FDE, come HE à DE (per essere la perpendicolare tirata da F sopra HE, comune altezza delle figure) & HE, ouero *e* l'eguale a lei AB a DE, stà come EF à K. Adunque *f* la figura HEF alla figura DEF, stà come EF à K. Laonde *g* per l'ordinata cōposizione, quella proporzione, che hà la prima figura ABC al-

a prop. 11. di questo.
b prop. 3. del 1.
c prop. 25 del 1.
d prop. 1. di questo.
e prop. 3. del 3.
f prop. 7. del 3.
g prop. 19 del 3.



la terza della medesima specie DEF, auerà anco ra la prima retta BC alla terza K. Ma BC à K hà la proporzione composta della proporzione di BC ad EF, e della proporzione della stessa EF à K; & è EF à K, come AB a DE. Adunque b la proporzione della figura ABC alla figura della medesima specie DEF, vien composta delle medesime proporzioni de' lati BC ad EF, e di AB a DE: il che bisognaua &c.

b prop. 19 del 3.

PROPOSIZIONE XIV.

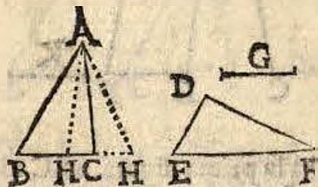
TEOREMA XI.

Eucl. 14. 15. del 6.

Se due triangoli, ouero due parallelogrammi aueranno vn' angolo eguale ad vn'angolo, & aueranno intorno gl' angoli eguali i lati reciprocamente proporzionali: saranno eguali trà loro. E se saranno eguali aueranno i lati circa gli angoli eguali reciprocamente proporzionali.

Sieno nel primo luogo due triangoli, ouero due parallelogrāmi ABC, e DEF, gli angoli de' quali B, & E sieno eguali trà di loro, e come il lato AB, a DE, così stia FE a CB; (imperciochè a così le figure ABC, e DEF sono reciproche, essendo ABC contenuta dalla prima AB,

a Dif. 1. di queste.



AB, e dalla quarta CB, e DEF, essendo contenuta dalla seconda DE, e dalla terza EF delle quattro proporzionali). Dico che i triangoli ABC, DEF, ouero i parallelogrammi sono eguali trà loro. Si faccia *b* EF a G, come AB a DE. Perche la EF alla BC, stà come AB a DE, e come AB a DE, così stà EF a G. Adunque *c* EF alle due BC, e G ha la medesima proporzione; e perciò *d* la BC, e la G sono eguali. Ma la BC a G, *e* hà la proporzione composta della proporzione di BC ad EF, e della proporzione della stessa EF a G, cioè del lato AB al lato DE. Adunque le due proporzioni de' lati, i quali contengono gli angoli B, & E, compongono la *f* proporzione di egualità, che ha la BC a G. Ma *g* la proporzione della figura ABC alla figura della medesima specie DEF, è composta delle medesime proporzioni de' lati BC ad EF, & di AB a DE. Adunque *h* la figura ABC alla figura della medesima specie DEF, hà la medesima proporzione di egualianza, che ha la BC alla G, come si cercaua.

b *prop. 11 di questo.*
c *prop. 7. del 5.*
d *prop. 4. del 3.*
e *prop. 19 del 3.*
f *prop. 19 del 3.*
g *prop. 13 di questo.*
h *prop. 7. del 3.*

Sieno nel 2. luogo i triangoli ABC, e DEF, ò pure i parallelogrammi trà di loro eguali, e gli angoli B, & E sieno eguali. Dico che la AB a DE, stà reciprocamente come EF a G. Se ciò non è vero, come AB a DE, così si



faccia EF alla BH maggiore, ò minore di BC, si compisca il triangolo,ouero il parallelogrammo ABH. E perche le due figure ABH, e DEF della medesima specie hanno i lati reciprocamente proporzionali intorno a gli angoli B,&E eguali. Adunque *i* la figura ABH è eguale alla figura DEF; ma per l'ippotesi la figura ABC era eguale alla DEF. Adunque le figure ABH, e ABC sono eguali trà loro, la parte, e il tutto, che è impossibile. Adunque la EF alla maggiore, ò minore della BC, non può auere la medesima proporzione, che hà la AB a DE, e perciò la BF alla stessa BC, stà reciprocamente come la AB alla DE. Il che bisognaua dimostrare.

i Dalla 1. parte di questa propos.

COROLLARIO I.

Eucl. 16. del. 6.

Quindi è, che se quattro rette linee saranno proporzionali, il parallelogrammo rettangolo contenuto dall'estreme, è eguale a quello, che vien contenuto dalle medie. E se due parallelogrammi rettangoli saranno eguali, sarà l'vno contenuto dalle estreme, e l'altro dalle medie di 4. rette proporzionali. Imperciochè due parallelogrammi rettangoli, l'vno de' quali è contenuto dalla prima, e quarta, l'altro dalla seconda, e terza di quattro rette proporzionali, anno intorno a gli angoli retti eguali i lati reciprocamente proporzionali. Adunque *k* sono eguali trà di loro; e se saranno eguali, aueranno i lati intorno *l* a gli angoli retti reciprocamente pro-

k prop. 14 di questo.
l Dalla stessa.

por

orzionali, e perciò vno ne farà contenuto dalla prima, e quarta, e l'altro dalla feconda, e terza delle quattro rette proporzionali.

COROLLARIO II.

E se tre rette linee saranno proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme sarà eguale al quadrato descritto dalla media. E se il quadrato sarà eguale al rettangolo, il lato del quadrato sarà medio proporzionale trà i due lati, che contengono il rettangolo. Poiche le tre rette proporzionali diuerranno quattro proporzionali, posta due volte la media proporzionale (e perciò, come si è detto nel precedente Corollario) il rettangolo contenuto dalle estreme sarà eguale a quello, che è contenuto da due medie, che siano tra loro eguali, cioè al *m* quadrato della media proporzionale. Medesimamente essendo il quadrato eguale al rettangolo, il quadrato sarà contenuto da due medie tra loro eguali, cioè da vna media di trè proporzionali. *Eucl. 17. del 6.* m *pr. 34. del 1.*



PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XIII.

Eucl. 19. del 6. *I triangoli simili anno dupplicata proporzione di quello de i lati Omologhi.*



Sieno i due triangoli ABC, e DEF simili trà di loro, gl'angoli de'quali B, & E sieno eguali, e i lati omologhi AB, e DE, ouero BC, & EF. Dico il triangolo ABC al triangolo DEF auere duplicata proporzione di quella di qualsiuoglia lato BC al suo omologo EF. Si faccia *a* EF a G, come AB a DE. Perche per la similitudine de'triangoli ABC, e DEF stà *b* AB a DE, come BC ad EF; ma come AB a DE così è stata fatta EF a G. Adunque *c* come BC ad EF, così sta EF a G. Perloche *d* la BC a G ha duplicata proporzione di quella, che ha la BC alla EF, ò pure la AB alla DE. Ma è la proporzione del triangolo ABC al DEF equiangolo a quello, come la BC alla G (auuenga che *e* è composta delle proporzioni de' lati BC ad EF, & di EF a G, ouero di AB a DE.) Adunque *f* il triangolo ABC al triangolo DEF simile a quello ha dupplicata proporzione di quella di qualsiuoglia lato BC all'omologo EF. Il che bisognaua dimostrare.

a prop. 11. di questo.
b prop. 4. di questo.
c prop. 7. del 1.
d prop. 19 del 3.
e prop. 13 di questo.
f prop. 7. del 3.

PRO-

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA IV.

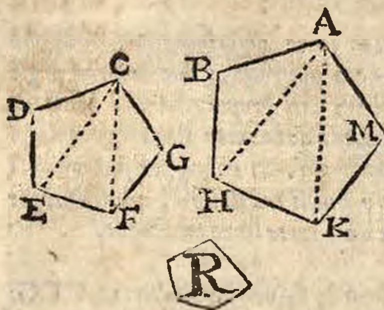
[So]pra vna data retta linea descriuere vn poligono equiangolo à vn dato poligono, e che intorno à gli angoli eguali abbia i lati proporzionali à i lati di quello; di modo che la data retta linea sia omologa al dato lato del poligono. Si chiamino somiglianti figure moltilatere simili trà di loro, e similmente descritte sopra le date rette linee omologhe. Eucl. 18. del 6.

[S]Ia data qualsiuoglia figura moltilatera CDG: si ha da descriuere sopra la data retta AB vna [fi]gura, ciaschuno angolo della quale sia eguale a [c]iascheduno angolo della figura data, & che in[to]rno a gli angoli eguali siano i lati proporzio[n]ali, di modo che la AB sia omologa al dato lato [D]C. Dall'angolo C si tirino a ciascheduno an[g]olo opposto della figura le rette linee CE, e CF, [c]he diuidano la figura ne' triangoli CDE, CEF, e [C]FG. Di poi facciasi *a* l'angolo BAH eguale à [D]CE, & HAK si faccia eguale all'angolo ECF, e [l]'angolo KAM facciasi eguale all' angolo FCG, [e] così di mano in mano, se più ve ne saranno, on[d]e tutto l'angolo BAM sarà eguale all'angolo [D]EG. Di più come *b* stà la DC a CE, così facciasi [l]a BA alla AH, e come la EC alla CF, così facciasi [l]a AH alla KA, e come la FC alla CG, così fac[c]iasi la KA alla AM; e così seguitando finche ve

a prop. 24 del 1.

b prop. 11 di questo.

n'è di bisogno. E' manif sto *c* per l'ordinata com-
c prop. 19 del 3. posizione, che BA ad AM, sta come DC a CG:
si congiungano finalmẽte le rette BH, HK, KM
Dico che la figura ABM quella, che si cercaua. Per che intorno a gli angoli e guali DCE, e BAH, i lati D C a CE, e BA ad AH anno la medesima proporzione



d prop. 6. di questo. Adunque *d* i triangoli DCE, e BAH sono simili, e parimente i triangoli ECF, & HAK saranno simili, si come saranno simili eziandio i triangoli
e prop. 4. di questo. FCG, KAM. Laonde gli *e* angoli CED, AHB sono eguali, e come stà DE ad EC, così stà BH ad HA, e sono parimente eguali gli angoli B, e D, e come CD a DE, così sta AB a BH. In oltre in virtù della similitudine de' triangoli ECF, & HAK, gli angoli CEF, AHK sono eguali, e come CE ad EF, così stà AH ad HK; ma era prima come
f prop. 19. del 3. DE ad EC, così BH ad HA. Adunque per *f* la compofizione ordinata, come DE ad EF, così starà BH ad HK, e sono gli angoli DEC, BHA eguali, e parimente gli angoli, CEF, AHK si sono mostrati eguali. Però l'angolo tutto DEF è eguale all'angolo tutto BHK. Per la medesima

ra-

ragione g l'angolo G sarà eguale all'angolo M, & FG, starà a GC come KM ad MA, e sarà l'angolo AKM eguale all'angolo CFG, & AK a KM, starà come CF ad FG. Ma h per la similitudine de' triangoli intorno à gli angoli eguali EFC, e HKA, i lati EF ad FC, & HK a KA sono proporzionali. Adunque i per l'ordinata composizione HK a KM, starà come EF ad FG, e sono tutti gli angoli HKM, & EFG eguali tra loro (essendo cõposti di eguali) e così de gli altri, se più ve ne saranno. Laonde tutti gli angoli della figura ABM sono eguali a tutti gli angoli della figura CDG, ad vno ad vno, & intorno a gli angoli eguali sono i lati proporzionali, gli omologhi de' quali sono le date rette linee AB, e CD. Si che si è fatto ciò che si era proposto di fare. Si chiamino ora somiglianti poligoni ABM, e CDG simili trà loro, e similmente descritti sopra gli omologhi AB, e CD.

g *prop. 4. di questo.*

h *prop. 4. di questo*

i *prop. 17. del 3.*

COROLLARIO.

Di quì facilmente si caua, che quei spazi rettilinei, che sono simili al medesimo rettilineo, sono anche simili tra loro.

Eucl. 21. del 6.

Imperòche se al medesimo rettilineo CDEF k si facciano, ouero si suppongano esser simili i due poligoni ABM, & R, cioè che siano equiangoli al medesimo CDG, & abbiano la medesima proporzione i loro lati, saranno ancora i due rettilinei ABM, & R equiangoli tra loro, & l auezan-

k *prop. 16 di questo.*

l *prop. 7. del 3.*

ranno intorno a gli angoli eguali i lati proporzionali; e perciò tra di loro saranno simili.

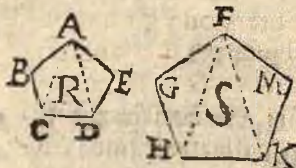
PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA XIII.

I poligoni simili anno duplicata proporzione di quella de i loro lati omologhi.

Sieno i Poligoni simili R, & S, i lati omologhi de'quali sieno AB, FG, ò pure BC, GH. E perche come *a* stà AB a BC, così stà FG a GH. Adunque *b* permutando, come AB ad FG, così stà BC a GH. Per la medesima ragione CD al suo omologo HK, starà come BC a GH, e così gli altri lati omologi saranno proporzionali. Onde *c* le loro duplicate proporzioni saranno le medesime. Dico ora che la figura R alla figura S ha proporzione duplicata del lato AB al suo omologo FG. Si congiungono da gli angoli eguali BAE, e GFM a gli angoli eguali opposti le rette linee AC, AD, FH, FK diuidenti le figure R, & S in pari moltitudini di triangoli, sendo che le *d* figure simili anno egual moltitudine de'lati; e perche intorno a gli angoli eguali B, e G, i lati

a prop. 16 di questo.
b prop. 12 del 3.
c Dalla prop. 19. del 3.
d prop. 16 di questo.



AB a BC, & FG a GH anno la medesima proporzione. Adunque e i triangoli ABC, & FGH no simili; e perciò gli angoli BCA, GHF sono guali, & AC a CB, ita come FH ad HG. Finalente f il triangolo ABC al triangolo a se simi- FGH hà duplicata proporzione di quella, che il lato AB al suo omologo FG. Per la medesia ragione sendo intorno a gli angoli E, M, i la- proporzionali, sarà il triangolo AED al simi- FMK in duplicata proporzione di quella del to DE al suo omologo KM; ò pure duplicata di ella del lato AB ad FG. Dopoi perche gli anoli BCD, GHK sono eguali, e i tolti via BCA, e HF si sono mostrati eguali. Adunque gli angorimanenti ACD, & FHK sono eguali, e staua C a CB, come FH ad HG, & è BC a CD, come H ad HK, per la similitudine de'poligoni. Adūe g per la composizione ordinata stara AC a D, come FH ad HK, e contengono gli angoli uali ACD, & EHK; Adunque h il triangolo CD è simile al triangolo FHK, & i a lui ha duicata proporzione di quella, che ha il lato CD suo omologo HR, ouero duplicata del lato AB FG. Per la medesima ragione gli altri trianoli (se più ve ne saranno) aueranno tra di loro uplicata proporzione del lato AB ad FG, e pero tutti k i triangoli antecedenti insieme presi a tti i triangoli conseguenti insieme, cioè la figua R ad S auerà la medesima proporzione, che l'vn triangolo ABC ad vn FGH, ò pure auera medesima duplicata proporzione di qual si vo-

gl*ia*

e prop. 6. di questo.

f prop. 15. di questo.

g prop 19 del 3.

h prop. 6. di questo

i prop. 15 di questo

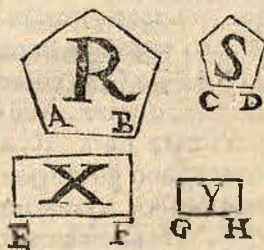
k prop. 15 del 3.

glia lato BC al suo omologo GH: il che bisogna-
ua dimostrare.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XIV.

Eucl. 22. del 6.
*Se i lati omologhi di quattro figure simili saranno pro-
porzionali, gli stessi rettilinei saranno ancora pro-
porzionali tra loro. E se i rettilinei simili saranno
proporzionali, i loro lati omologhi saranno ancora
proporzionali.*



Sieno le due figure R & S simili tra di loro, e parimente le due figure X, Y sieno simili tra di loro: e habbia primamente AB lato della figura R al suo omologo lato CD della figura S la medesima proporzione, che hà EF lato della figura X al suo omologo lato GH della figura Y. Dico che la figura R alla S ha la medesima proporzione, che ha X alla fi-
a prop. 17 di questo.
gura Y. Perche *a* la figura R alla S a lei simile hà proporzione duplicata di quella, che hà il lato AB al suo omologo CD; Ed è parimente la proporzione della figura X alla Y a lei simile, duplicata di quella che ha il lato EF all'omologo
b prop. 19 del 5.
GH. E sono *b* le proporzioni duplicate delle si-
mili,

mili, ò pure delle medesime proporzioni AB à CD, & EF a GH, le medesime ancora, ouero simili. Adunque *c* la proporzione della figura R alla S è la medesima, che quella della figura X ad Y. Il che si doueа nel primo luogo prouare.

c *prop. 7. del 3.*

Sia secondariamente la figura R alla S a lei simile, come la X alla figura Y a lei simile; e sieno AB, CD, EF, GH lati omologhi. Dico che AB a CD sta come EF a GH. Perche le proporzioni delle figure R alla figura simile S, & X alla simile Y sono medesime, e *d* sono duplicate delle proporzioni de'lati omologhi. Adunque *e* le loro suduplicate, cioè le proporzioni de'lati AB a CD, & EF a GH, sono ancora le medesime. Il che bisognaua dimostrare.

d *prop. 17 di questo.*
e *Dalla prop. 19 e 21. del 3.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XV.

I parallelogrammi posti intorno ad angoli eguali, & intorno al comune diametro, che habbiano i lati in diritto saranno simili trà di loro. E se saranno simili trà di loro, & abbiano i lati omologhi posti in diritto, saranno situati intorno al comune diametro. Et i due parallelogrammi del compimento saranno eguali trà loro.

Eucl. 24. e 26. del 6. e 34. del 1.

I Due parallelogrammi AC, & EF sieno collocati intorno al comune diametro DBG, intorno a gli angoli eguali ABC, & EBF, & abbiano

biano i lati omologhi AB, BE posti in diritto, e posti parimente in diritto i lati CB, e BF. Dico nel primo luogo i parallelogrammi AC, & EF esser simili. Perche la retta EG parallela alla DA base del triangolo DBA sega i due suoi lati; Adunque a il triangolo ABD è simile al triangolo EBG; e perciò i lati omologhi AB a BE, & DA ad EG, e medesimamente DB a BG, aueranno la medesima proporzione. Similmente, perche FG è parallela alla DC base del triangolo CDB, saranno i triangoli CDB, GBF simili tra di loro, e come sopra i lati omologhi CB a BF, e DC a GF aueranno la medesima proporzione, che ha la medesima BD alla medesima BG. E però b AB a BE, AD ad EG, DC a GE, & CB a BF aueranno la medesima proporzione. Laonde c permutando AB a BC, starà come EB a BF intorno a gli angoli eguali ABC, EBF; e parimente intorno gli angoli eguali d alterni, ouero all'esteriore, & interiore DAB, e GEB, starà BA ad AD, come BE ad EG, e così tutti gli altri lati opposti. Laonde e i parallelogrammi AC, & EF saranno simili tra di loro.

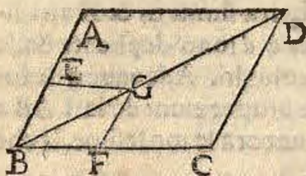
a *Dalla prop. 6. di questo.*

b *prop. 7. del 3.*

c *prop. 12 del 3.*

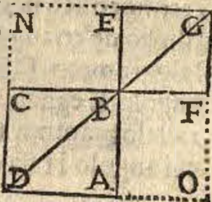
d *prop. 15 del 1.*

e *prop. 16 di questo*



Sieno nel secondo luogo i parallelogrammi AC, EF simili, & abbiano i lati omologhi AB, e BE posti in diritto, e così posti in diritto i lati CB, e BF; e si tirino i diametri DB, e BG. Dico DBG

ſſere vna ſola retta linea. Perhe ne' due triangoli DC*B*, *B*E ; i lati DC, e *B*E ſon paralle- , eſſendo la A*B*, e la *BE* poſte i diritto, e f la AB parallela all'oppoſto lato DC nel pa allelogrammo CA; e per la medeſima ragione ſono paralli i lati C*B*, & *E*G, e gli angoli g DC*B*, e *B*EG ſono eguali per la ſimilitudine delle figure: Adũque le baſe D*B*, *B*G ſono parallele tra loro, e ſi *i* toccano nel punto *B*. Perloche ſon poſte in diritto.



f prop. 26. del 1.

g prop. 17 di queſto.

h prop. 7. di queſto.

Terzo dico, che i parallelogrammi del compimento N*B*, e *B*O ſono eguali tra loro. Perche ntorno a gli angoli eguali alla cima E*B*C, & A i lati ſon reciprocamente propozionali; iche come A*B* a *B*E, ſi è così dimoſtrata C*B* a . Adunque i parallelogrammi *l* N*B*, e *B*O ſono eguali. Le quali coſe doueanſi dimoſtrare.

i prop. 17. del 1.

k Corol. della pr. 5.

l prop. 14. di queſto.

PROPOSIZIONE XX.

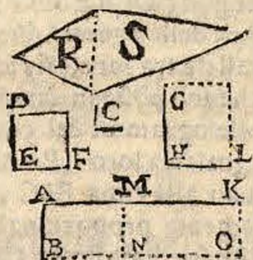
PROBLEMA V.

ra vna retta linea data in vn'angolo dato applicare vn parellelogrammo eguale à vn rettilineo dato.

Eucl. 14. e 45. del 1.

la la figura rettilinea RS, e qualſiuoglia retta data A*B*, e l'angolo dato C. Deue applicarſi ra la retta A*B* il parallelogrammo eguale al ret-

rettilineo RS nell'angolo C. Si spartisca il ret-
a prop. 33. del 1. tilineo ne' triangoli R, & S, e si facc a *a* il para-
lelogrammo DEF eguale al triangolo R nel-
angolo E eguale a C: e parimente si faccia il pa-
rallelogrammo GL eguale al triangolo S, il
cui angolo H sia eguale al medesimo angolo C.
b prop. 24 del 1. Dopoi facciasi *b* l'ango-
lo *BAK* eguale all' ango-
c prop. 11. di questo. lo C, e come *c* *B*A a DE
così si faccia FE ad AN
e si compisca il paralle-
logrammo AN Faccia
medesimamente come
NM a GH, così LH a
MK, e si compisca il pa-
rallelogrãmo MO. Per-
d prop. 14 di questo. che *d* i due parallelogra-
mi AN, e DF intorno
gli angoli eguali A, & E, anno i lati reciproca-
mente proporzionali, adunque sono tra di loro
eguali, ed il triangolo R si è fatto eguale al pa-
rallelogrammo DF. Si che il parallelogrammo
e prop. 15 del 1. AN è eguale al triangolo R. Di poi perche *e*
A*B*, MN son parallele, sarà l'angolo esteriore
*K*MN eguale all'angolo A interiore, & opposto
& è l'angolo H eguale all'angolo C, ouero
A, però i due angoli H, e *K*MN sono eguali tra
loro; ed intorno a questi angoli eguali sono i la-
ti reciprocamente proporzionali. Adunque il
f prop. 14 di questo parallelogrammo GL, ouero il triangolo S a lui
eguale, sarà eguale al parallelogrammo M



Per-

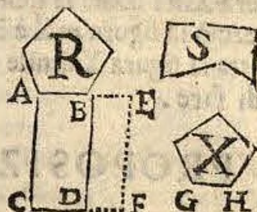
erloche i due parallelogrammi AN, & MO. oè il parallelogrammo KABO, sarà eguale a ue triangoli R, & S, ò pure al rettilineo dato. d è applicato sopra la retta AB nell'angolo A guale a C. Adunque si è fatto il problema.

PROPOSIZIONE XXI.

PROBLEMA VI.

ati due poligoni, desciuerne vn terzo, il quale sia simile all' vno, & eguale all'altro de' dati.

Sieno le due date figure rettilinei R, & S, eue descriuersi vna figura, che sia eguale alla figura S, e simile alla figura R, sopra qualsiuoglia ato AB della figura R, si faccia il parallelogrammo AD eguale allo



pazio R in qualsiuoglia angolo BAC, e prodotta la AB in E sopra la BD nell'angolo EBD, il uale sarà *b* eguale all' interiore, & opposto BA , facciasi *c* il parallelogrammo BF eguale allo pazio S. Egli è certo, che i parallogrammi AD, BF sono trà le medesime parallele AE, CF. Di oi frà le due rette AB, e BE, si faccia *d* la media roporzionale GH, sopra la quale si *e* faccia la fiura X simile ad R, di modo che GH sia lato omo-

a *prop.20 di questo.*

b *prop.15 del 1.*

c *prop.20 di queste.*

d *prop.10 di questo.*

e *prop.16. di questo.*

logo ad AB. Perche R, & X son figure simili; aurà *f* R ad X proporzione duplicata di quella, che ha il lato AB al suo omologo GH. Ma *g* AB a BE hà duplicata proporzione di quella, che ha AB alla media proporzionale GH. Adunque *h* come AB a BE, così stà la figura R alla figura X; ma *i* il parallelogrammo AD al parallelogrammo BF stà come la base AB alla base BE (essendo tra le medesime parallele). Perciò la *k* figura R alla figura X, stà come il parallelogrammo AD al parallelogrammo BF: ma il parallelogrammo AD è eguale alla figura R, & il parallelogrammo BF è eguale allo spazio S. Adunque *l* la figura R alla figura X, stà come la stessa figura R alla figura S; e perciò la figura *m* X è eguale allo spazio S, e si è fatta la figura X simile ad R. Il che era mestieri di fare.

f prop. 17 di questo. *g prop. 19 del 3.* *h prop. 7. del 3.* *i prop. 1. di questo.* *k prop. 7. del 3.* *l prop. 3. del 3.* *m prop. 4 del 3.*

PROPOSIZIONE XXII.

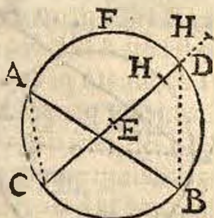
TEOREMA XVII.

Se in vn cerchio saranno distese due rette linee, che si seghino, il parallelogrammo rettangolo contenuto dalle porzioni dell'vna, sarà eguale al rettangolo, che vien contenuto dalle porzioni dell'altra. E se i rettangoli contenuti dalle porzioni di due rette, che si seghino saranno eguali; passarà per i quattro termini di quella la circonferenza di vn cerchio.

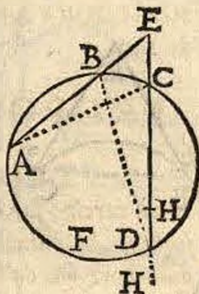
Eucl. 35. 36. e 37. del 3.

NEl cerchio ABF, le due distese rette linee AEB, e DEC si seghino nel punto E, ò ambe-

bedue feghino la circonferēza del cerchio in due punti, come nella prima, e nella feconda figura, ouero vna retta AEB la feghi ne' due punti A, e B, e l'altra DEC tocchi la medefima circonferenza in vn punto addita-to da i caratteri D, e C, co-



me nella terza figura, ò pure ambedue tocchino il cerchio, come nella quarta figura. Dico che il parallelogrammo rettangolo contenuto dalle porzioni AE, EB dell'vna retta linea, è eguale al rettangolo contenuto dalle porzioni DE, & EC dell'altra. Si congiunghino le rette AC, DB. Perche i due angoli EDB, & EAC fono eguali; effendo *a* nella medefima porzione del cerchio CFB, come nella prima, e feconda figura, *b* ò l'angolo EDB è cōtenuto dalla tangente ED, e dalla fegante BD, e l'altro angolo EAC è pofto nella alterna porzione BFC, come nella terza figura, ò pure *c* amendue gli angoli contenuti dalle tangenti, e dalla medefima fegante BC, fono eguali a quello, che può farfi nell alterna porzione BFC, come nella quarta figura; e fono *d* gli angoli AEC, e DEB eguali alla cima, ò pure vn folo medefimo. Adunque



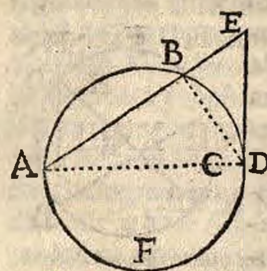
a *prop. 14. del 2.*

b *prop. 24 del 2.*

c *Dalla prop. 24. del 2.*

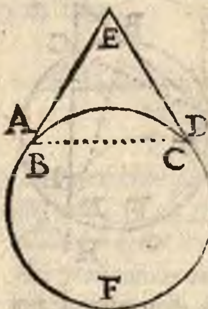
d *Dal Corol. della prop. 5. del 1.*

e Dalla prop.4. di questo.
f Corolar. della pr. 14. di questo.



que e i due triangoli AE[C] e DEB sono simili, e per[ò] come AE ad EC, così [la] DE ad EB. Per la f qu[al] cosa il parallelogramm[o] rettangolo contenuto da[l]la prima, e quarta delle proporzionali, cioè il re[t]tangolo AEB sará egua[le] al rettangolo DEC, che contenuto dalla seconda, e terza. E se le porzio[ni] di qualsiuoglia di quelle, come CE, & ED sa[ran]no eguali, allora il quadrato di CE sarà egua[le] al rettangolo CED, e perciò il rettãgolo AE[B] sara eguale al quadrato di CE.

g Come' si fece nella prop. 14. del 2.



Nel secondo luogo le du[e] rette AEB, e DEC, le quali [si] seghino nel punto E, faccian[o] i rettãgoli AEB, e DEC egua[li] tra loro, e g si tiri per i tr[e] punti A, C, B la circonferen[za] di vn cerchio. Dico che el[la] la stessa passerà per il pũto D[.] Perche, se ciò non è vero, pa[s]si per il punto H di quà, ouer[o] di la dal punto D. Adunque h il rettangolo HEC sarà egua[le] al rettangolo AEB; ma era il rettãgolo DE[C] eguale al medesimo rettangolo AEB. Però i ret[t]ãgoli HEC, e DEC sono eguali tra loro, la par[te], e il tutto, che è impossibile. La circonferenza dun[que]

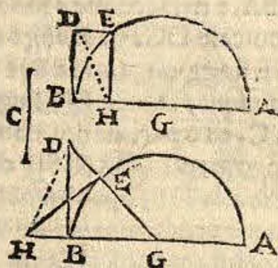
h Dalla 1. parte di questa pr.

unque del cerchio ACB non passa per il punto
. Si che passarà per i punti A, B, C, e D, come
a stato proposto.

PROPOSIZIONE XXIIII.

PROBLEMA VII.

ate due rette linee, ritrouare vn punto in vna di loro, ò dentro, ò fuori, che faccia due porzioni, trà le quali l'altra linea data sia media proporzionale: Ma fà di mestieri, che la metà della retta linea, dentro la quale deesi segnare il punto non sia minore dell' altra retta linea data.



Sieno le due rette linee AB, e C, deesi ritrouare il pũ dentro la retta linea AB, come nel primo caso, ò fuori di lei in diritto, come nel secondo, di modo che la retta linea C sia media proporzionale tra le fatte porzioni; ma fà di mestieri nel primo caso, che la meta della AB non sia minore della C. Sopra il diametro AB descriuasi il cerchio AEB, il di cui centro G, e dal termine B si tiri la BD perpendicolare alla AB, e si seghi la BD eguale alla C: di poi dal termine D (nel pri-

a *Dalla prop.* 10. *del* 1.

b *Dalla prop.* 3. *del* 1.

primo caso) si tiri la retta linea DE parallela alla AB, la quale non caderà fuori del cerchio, per essere supposta la metà della AB, cioè il raggio, ouero l'altezza del semicerchio AEB eguale, ò maggiore della C, ò pure della perpendicolare BD; e però la DE toccherà, ò segherà il cerchio nel punto E. Ma nel secondo caso congiungasi la retta DG al centro del cerchio, la quale nel punto E seghi la di lui circonferenza. Si seghi *c* in oltre BH eguale alla DE, e si cōgiungano le rette EH, DH. Perche ne' due triangoli EDH, BHD si sono fatti i due lati BH, e DE eguali, ed è il lato HD comune, & eguali sono tra loro gli angoli compresi EDH, e BHD (perche nel primo caso *d* sono alterni nelle parallele DE, e BA, e nel secondo *e* sono alla base del triangolo iscoscele DGH, auuenga che a i raggi eguali GB, GE si aggiungano le BH, ED eziandio eguali) adunque *f* la base EH è eguale alla BD, ouero alla C, ed è parimente l'angolo DEH eguale all' angolo retto DBH. Si *g* che la HE è perpendicolare alla DE; e perciò nel primo caso *h* la EH sega perpendicolarmente ancora il diametro BA equidistante alla DE; ma nel secōdo caso *i* la HE toccherà il cerchio nel punto E. Adunque *k* il parallelogrammo rettāgolo AHB è eguale al quadrato della retta linea HE. Onde la *l* HE, ouero la C a lei eguale, sarà media proporzionale tra le porzioni AH, & HB; come era stato proposto.

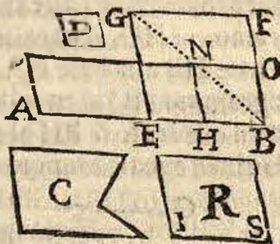
c *Dalla prop. 3. del 1.*
d *Dalla prop. 15. del 1.*
e *Dalla prop. 6. del 1.*
f *Dalla prop. 4. del 1.*
g *Dalla prop. 10. del 1.*
h *prop. 15 del 1.*
i *Dalla prop. 21. del 2.*
k *Dalla pr. 21. di questo.*
l *Corol. 2. della pr. 14. di qu.*

PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA VIII.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo eguale à vn dato ſpazio rettilineo, che ſia mancante, ò eccedente di vn parallelogrammo, il quale ſia ſimile à vn'altro dato. Ma quando il parallelogrammo da applicarſi dourà eſſer mancante, e neceſſario, che il detto ſpazio non ſia maggiore del parallelogrammo ſimile al dato, deſcritto ſopra la metà. *Eucl. pr. 28. e 29. del 6.*



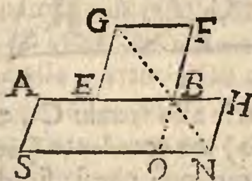
Sia dato qualſiuoglia ſpazio rettilineo C, & il parallelogrammo D, e la retta linea AB, e ſopra la di lei metà EB ſi faccia *a* il parallelogrammo EF ſimile a D. Deue addattarſi alla retta AB vn parallelogrammo eguale allo ſpazio C, e mancante (nel primo caſo) ma eccedente (nel ſecondo) di vn parallelogrammo, che ſia ſimile a D: ma biſogna nel primo caſo, che lo ſpazio C non ſia maggiore del parallelogrammo EF. Facciaſi *b* il parallelogrammo R ſimile ad EF, ed eguale allo ſpazio C, & il ſuo lato IS ſia omologo ad EB. E perche nel primo caſo ſi pone lo ſpa-

a Dalla prop. 16. di queſto

b Dalla prop. 21. di queſto.

c prop.17. di questo. zio C, ouero lo a lui eguale parallelogrammo R, non maggiore del parallelogrammo EF. Adunque c il lato IS sarà eguale, ò minore del lato a lui omologo EB, cioè della metà di AB. Si che la retta AB d può esser segata in H, sì come nel secondo caso e può esser prodotta, acciòche il rettangolo AHB diuenga eguale al quadrato della retta IS. Di poi dal punto H si tiri f la HN parallela alla BF, la quale g sarà segata dalla GB diametro del parallelogrammo nel punto N; e per il punto N si tiri h la ON parallela alla AB e tirando le i altre linee parallele, si compisca il parallelogrammo AN. E perche il quadrato k di HB al rettãgolo BHA, sta come la BH alla HA (auendo comune l'altezza HB) ed è il parallelogrammo l HO, al parallelogrammo AN, come la base HB alla base HA. Adunque m il parallelogrammo HO al parallelogrammo AN, stà come il quadrato di BH al rettangolo BHA, ouero allo n eguale a lui quadrato della retta IS. Ma il parallelogrãmo EF al parallelogrãmo HO a lui simile, o intorno al comune diametro GBN, sta come p il quadrato di EB al quadrato di EH. Adunque q per la composizione ordinata il parallelogrammo EF al parallelogrammo AN, sta come il quadrato EB al quadrato della retta IS. Ma r come il quadrato di EB al quadrato della retta IS, così sta il parallelogrammo EF al parallelo;

d prop.23 di questo.
e Dalla stessa.
f Dal Corol. della pr.16. del lib.1.
g Dalla prop. 29. del 1.
h Dal Corol. della prop. 16. del 1.
i prop.29. del 1.
k Dalla prop. 1. di questo.
l Dalla prop 1. di questo.
m Dalla pr.7. del 3
n Dalla pr.3. del 3
o Dalla prop. 19. di questo.
p prop.18 di questo.
q dalla pr. 19. del 3.



lelogrammo R, ouero s allo spazio C, eguale a questo. Adunque t il parallelogrammo EF ha la medesima proporzione al parallelogrãmo AN, & a lo spazio C; e perciò l'applicato parallelogrammo u AN è eguale allo spazio dato C; e x manca nel primo caso, e soprauanza nel secondo della figura HO, che è simile alla EF, ouero al dato y parallelogrãmo D. Il che bisognaua fare.

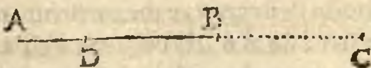
r dalla pr 18 di qu. s dalla pr 3. del 3. t dall a pr 7. del 3. u dalla prop. 4. del 3. x dalla diff. 2. di questo. y Corol. della pr. 16. di qu. Eucl. 11. del 2 e 3. del 6.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA IX.

Segare vna proposta retta linea terminata in due porzioni, l'vna delle quali sia media proporzionale trà tutta la linea, e trà l'altra porzione. E la retta così segata si chiami diuisa, secondo l'estrema, e meza proporzione.

DEesi segare la data retta A B, come vien proposto. Si a produca la retta AB in C, in modo, che la stessa AB diuenga media proporzionale trà tutta la prodotta AC, e'l suo slungamento BC, e si b seghi la BD eguale alla BC; starà la CA alla AB, come la AB alla BC, ouero c alla DB eguale a lei, e comparando le differēze d de' termini a i conseguenti, la CB, ò pure e la sua eguale DB, starà al la BA, come la AD alla DB, e perciò la porzione BD sarà media proporzionale tra tutta la linea



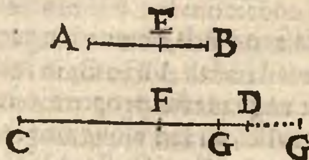
a dalla prop. 23. di questo. b dalla pr. 3. del 3 c dalla pr. 3. del I d dalla pr. 3. del 3 e dalla pr. 3. del 3

linea AB, e l'altra sua porzione AD; il che bisognaua fare. Ora la retta AB segata in questa maniera nel punto D, si chiami spartita, secondo la meza, & estrema proporzione.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XVIII.

Pappo pr. 54. del 5. *Se di due rette linee spartite nella medesima proporzione, ve ne sarà vna segata, secondo l'estrema, e meza proporzione, sarà in cotal maniera segata ancor l'altra; e se di due rette ciascheduna sarà segata secondo l'estrema, e meza proporzione, saranno ambedue spartite nelle medesime proporzioni.*



Sia la AB spartita in *E*, secondo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior proporzione sia A*E*, e come la BA alla A*E*, così stia la DC alla CF. Dico che la CD in F è segata, secondo l'estrema, e meza proporzione. Perche la BA alla A*E*, sta come la DC alla CF. Adunque *a* comparando le differenze de' termini ai conseguenti, sarà la B*E* alla *E*A, come la DF alla FC, & *b* inuertendo stara la A*E* alla *E*B, come la CF alla FD. E perche la AB è spartita in *E*, secondo l'estrema, e meza proporzione, adunque

a dalla prop. 13 del 3

b dalla pr. 9. del 3

la

ac *AE* alla *EB*, stà come la BA alla *AE*; ma come la BA alla *AE*, così staua la DC alla CF; però *d* la DC alla CF stà come la *AE* alla *EB*; ma come la *AE* ad *EB*, così fù prouata la CF alla FD. Adunque *e* come la DC alla CF, così stà la CF alla FD; e perciò la CD è segata in F, secondo l'estrema, e meza proporzione.

c dalla prop. 25. di questo.
d dalla pr 7. del 3.
e dalla medesima

Nel secondo luogo sieno segate le due rette AB, e CD, ambedue secondo l'estrema, e meza proporzione ne' punti *E*, & F. Dico che elleno sono segate proporzionalmente. Se questo non è vero sia la CG (maggiore, ò minore di DC) alla CF, come la BA alla *AE*. Adunque come si è detto, *f* conforme la AB in *E*, così la GC in F sarà segata, secondo l'estrema, e meza proporzione, e perciò *g* il rettangolo FGC sarà eguale al quadrato della media proporzionale CF; ma per l'ipotesi la CF era media proporzionale trà la FD, e la CD; adunque *h* il parallelogrammo rettangolo FDC è eguale al quadrato della medesima CF. Laonde i parallelogrammi rettangoli FGC, & FDC saranno eguali trà di loro, la parte, e'l tutto, il che è falso. Nõ è adũque possibile, che vn'altra GC maggiore, ò minore della DC abbia alla CF la medesima proporzione, che hà la BA alla *AE*; e perciò la stessa DC alla CF, starà come la BA alla *AE*: e *i* le differenze alle conseguenti, cioè B*E* alla *E*A, starà come la DF alla FC; & *k* inuertendo la A*E* alla *EB*, starà come la CF alla FD; per la qual cosa è manifesto quello che si cercaua.

f 1. part. di questa prop.
g Corol. 2 della pr. 14. di qu.
h Del medesimo Coroll.
i prop. 13. del 3.
k prop. 9. del 3.

CO-

COROLLARIO.

Euclid. 5. del 13. Da queste due proposizioni si caua, che se ad vna retta linea spartita, secondo l'estrema, e meza proporzione si aggiungnerà vna retta eguale al pezzo maggiore: tutta la linea composta vien segata secondo l'estrema, e meza proporzione, della quale il pezzo maggiore è la retta linea posta dal principio. Imperciòche nella proposizione vinticinque fù segata la AB in D, secōdo l'estrema, e meza proporzione, & aggiunta la BC eguale alla maggiore porzione BD, staua la BD, ouero la sua eguale CB alla BA, come la AD alla DB. Onde così la AB in D, come la CA in B, sono spartite con la proporzione medesima; e perciò come si è dimostrato in questa venseesima proposizione sarà, la retta CA segata in B, secondo l'estrema, e meza proporzione, si come la AB in D, secondo la meza, & estrema proporzione era stata spartita.

Fine del Libro quarto.



LIBRO QVINTO

Della defcrizione, e proprietà di varie figure piane, e loro proporzioni.

Di Eucl. lib. 4. 2. e refiduo del 6.

DIFFINIZIONI.

I.

VNa figura rettilinea fi dice infcritta nel cerchio, quando tutti i fuoi angoli toccaо la circonferenza del cerchio: e dicefi circonritta al cerchio, quando tutti i fuoi lati toccaо la circonferenza di quello.

I I.

E per il cōtrario dicefi il cerhio infcritto in vna figura retlinea, quando la fua circonfenza tocca tutti i lati della fira; e dicefi il cerchio circonritto alla figura rettilinea, ando la circonferēza di quel tocca tutti gli angoli della figura.

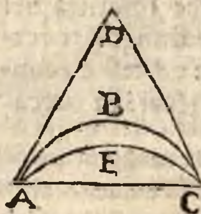


AS-

ASSIOMA.

Di Archimede de sphæra, & Cylindro lib. 1.

Se da' termini d'vna retta linea, che suttenda l'arco di qualche cerchio, saranno tirate due altre rette linee, che concorrono fuor del cerchio e sian tutte fuor di esso situate, ò pure in somigliante maniera sia tirata vna linea curua; saranno le linee, che comprendono mai sempre maggiori della circonferenza compresa, e la retta linea suttesa sarà minore della circonferenza, ò della curua.



La circonferenza d'vn cerchio AEC sia suttesa dalla retta AC, e tanto la curua ABC, quanto le due tangenti AD, CD concorrenti in D, cadano fuori del cerchio. S' intende col lume naturale, che la retta AC è minore della curua AEC, ò pure della ABC, per essere la retta breuissima di tutte. E la AEC è minore di ABC, e questa è minore di ADC, imperòche meno s'allontana dalla dirittura la AEC, che la ABC; e questa meno che le ADC.

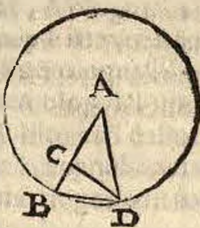


PRO-

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I.

a vn punto preso in vna data retta linea constituire vn'angolo, che sia la quinta parte di quattro retti.



SOpra la data retta linea A B nel punto suo B, deuesi escriuere vn' angolo, che sia quinta parte della somma di uattro retti. Diuidasi la retta B *a* secōdo la media, & estre- a proporzione in C, la mag- ior porzione della quale sia C, e dal centro A, con l'inter- allo AB, descriuasi il cerchio BD, nel quale si pplichi la retta BD, eguale *b* alla maggior por- ione AC. Dico che l'angolo ABD è quello, che cercaua. Congiunte le rette AD, e CD. Per- he *c* le trè rette linee BA AC, e CB son propor- onali, & è la BD eguale alla AC, & il raggio A eguale ad AB. Adunque ne' triangoli ABD, DBC intorno *d* a gli angoli eguali ADB, e B ppositi a i raggi eguali, la AB, ò pure la AD alla B, stà come la DB alla BC: però *e* l'angolo DB sara eguale all'angolo A; e la AC alla CB come la BA alla AC, ò pure come la AD alla B: adunque *f* l'angolo ADB, ò pure l'eguale a B, sarà il doppio dell'angolo CDB, ò pure dell'

a *prop.* 25 *del* 4.

b *prop.* 12 *del* 2.

c *prop.* 25 *del* 4.

d *prop.* 6. *del* 1.

e *prop.* 6. *del* 4.

f *prop.* 3. *del* 4.

dell'angolo A. Laonde di quelle parti delle quali l'angolo A ne è vna, sarà l'angolo B due parti, e ADB altretante; per lo che gli angoli A, B, e ADB insieme presi (i quali *g* sono eguali a due retti) verranno ad essere eguali a cinque angoli, ciascuno de'quali è eguale ad A; e perciò l'angolo A verrà ad essere la quinta parte di due angoli retti. Ma qual proporzione doppia ha l'angolo B all'angolo A, la medesima aura la somma di quattro retti a quella di due retti; e permuttando *h* l'angolo B alla somma di quattro retti, starà come l'angolo A alla somma di due retti; ma si mostrò l'angolo A esser la quinta parte di due retti; adunque *i* l'angolo *B* sarà la quinta parte di quattro angoli retti, come fù proposto.

g prop. 18 *del* 1.

h prop. 12 *del* 3.

i Dif. 8. *del* 3.

COROLLARIO.

Eucl. pr. 10. *del* 4.

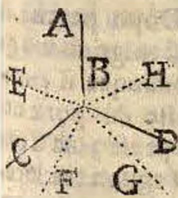
Vedesi la maniera di descriuere vn triangolo isoscele, nel quale ciascuno de gli angoli sopra la base sia il doppio del rimanente alla cima.



PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA II.

Ritrouare vn' angolo, che sia vna parte quindicesima di quattro retti.



DEuesi fare vn' angolo, che sia vna parte di quelle delle quali la somma di quattro retti ne contiene quindeci. Facciasi *a* l' angolo ABC doppio d'vno de' gli angoli del triangolo equilatero. E perche come due retti à quattro retti, cosi stà vn'angolo del triangolo equilatero all'ãgolo ABC, per esser gl'antecedenti la meta de i consequenti; permutando *b* come due retti ad vn' angolo del triangolo equilatero, cosi stanno quattro retti all'angolo ABC: ma vn'c angolo del triangolo equilatero è la terza parte di due retti; adunque l'angolo ABC sarà anche la terza parte di quattro retti. Facciasi poi l'angolo CBD anch' egli la terza parte di quattro retti, cioè *d* eguale all' angolo ABC. E perche *e* tutti gli angoli ABC, CBD, e DBA, che stanno intorno al punto B sono eguali a quattro retti, e sono i due angoli ABC, e CBD due terze parti di quattro retti; Adunque il rimanente angolo ABD sarà parimente la terza parte di quattro retti. Si facciano poi *f* gli angoli ABE,

a *prop. 24. del 1.*

b *prop. 12 del 3.*

c *Dalla prop. 18. del 1.*

d *prop. 24 del 1*

e *Dalla prop. 12. del 1.*

f *prop. 1. di questo.*

Q EBF,

EBF, FBG, GBH, ciascuno de'quali sia la quint parte di quattro retti, verrà ad essere (come so pra si disse) il quinto angolo HBA eguale a gli al tri, e sarà la quinta parte di quattro retti. E per che l'angolo ABF è eguale all'angolo ABG, es sendo ciascun di loro due quinti di quattro retti e sono i due angoli ABC, & ABD anche egual trà loro; adunque gli angoli rimanenti CBF, DBG saranno eguali tra loro: Dopoi perche da gli angoli eguali ABC, e CBD si tolgono via g eguali angoli ABE, & FBG: adunque il rima nente angolo EBC sarà eguale alle due porzion rimanenti CBF, e GBD insieme prese; ma si son mostrati gli angoli CBF, e GBD eguali trà loro. Adunque l'angolo EBC sarà il doppio dell'ango lo CBF; e tutto l'angolo EBF sarà il triplo dell' angolo CBF. Per la medesima ragione tanto l'angolo ABE, quanto ABH, quanto HBG, e quanto FBG sarà eguale al triplo dell'angolo CBF. Per la qual cosa tutti gli angoli FBE, EBA, ABH, HBG, GBF insieme presi, contengono cinque volte la somma di tre angoli, ciascuno de' quali è eguale a CBF, cioè quindeci volte conten gono il medesimo angolo CBF. E però l'angolo CBF preso quindeci volte, viene ad essere eguale a tutti gli angoli, che si posson fare intorno al punto B, g cioè a quattro retti. Il che si doueua fare.

g Dalla prop. 12. del 1.

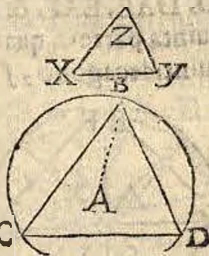


PRO·

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA III.

In qualsiuoglia cerchio inscriuere vn triangolo equiangolo ad vn'altro dato; & i poligoni equilateri, & equiangoli di trè, di quattro, di cinque, e di quindeci lati; E qualsiuoglia altri, ne' quali successiuamente si vadano radoppiando i lati. E chiaminsi cotali figure regolari. *D'Eucl. è la 2. 6. 11. 15. 16. del lib. 4.*



NEl cerchio BCD, il cui raggio AB, si deono inscriuere le figure imposte: e prima il triangolo, che sia equiangolo al dato triãgolo ZXY. Taglisi *a* la porzione BDC del cerchio capace di vn'angolo eguale all'angolo Y, e tirisi la retta BC, e nella parte opposta *b* taglisi la porzione BCD capace d'vn'angolo eguale all'X, e si congiungano le rette BD, e CD. E' manifesto, che l'angolo D è eguale alla Y, e l'angolo C è eguale all'X, e però *c* il triangolo BCD inscritto nel detto cerchio, sara equiangolo al dato triangolo ZXY.

a *prop. 26 del 2.*

b *Per l'istessa.*

c *Dalla prop. 18. del 1.*

Nel secondo luogo volendosi inscriuere nel cerchio il triangolo equilatero, & equiangolo, si douranno diuidere (come si fece nella preceden-



te propoſizione) tutti gli angoli al centro, cioè quattro retti in tre angoli BAC, CAD, e DAB, ciaſcuno de' quali ſia eguale alla terza parte di quattro retti; ma volendoſi inſcriuere il quadrato, ſi facciano quattro angoli *d* al centro BAC, CAD, DAE, & EAB, ciaſcuno de' quali ſia la quarta parte di quattro retti, cioè ſia vn retto: e volendoſi inſcriuere il pentagono, facciānſi *e* cinque angoli BAC, CAD, DAE, EAF, & FAB, ciaſcuno de' quali ſia la quinta parte di quattro retti. Finalmente per il quintidecagono, *f* facciānſi al centro quindici angoli BAC, CAD, DAE, EAF &c. ciaſcuno de' quali ſia la quindiceſima parte di quattro retti. E' manifeſto in qualſiuoglia delle dette diuiſioni, che tutti gl'angoli al centro ſono eguali trà loro; tirinſi ora in tutte i raggi AB, AC, AD, &c. fino alla circonferenza del cerchio ne' punti B, C, D, &c. e ſi congiungano le rette BC, CD, DE, &c. finche reſtin compite le figure. Deueſi dimoſtrare tutti i predetti poligoni eſſere equilateri, & equiangoli. Perche tutti gli angoli verticali al centro A, quali ſono BAC, CAD, &c. ſi ſono fatti trà di loro eguali, e tutti i raggi ſon-

d *prop.* 10 *del* 1.

e *prop.* 1. *di queſto.*

f *prop.* 2. *di queſto.*

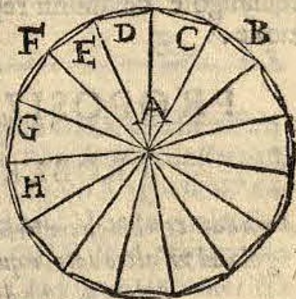


pa;

parimente eguali. Adunque tutti gli triangoli isosceli BAC, CAD, DAE &c. sono similmēte eguali, d'eguale altezza, & equiangoli trà di loro, e le loro base BC, CD, DE &c. sono ancor'esse eguali. Per la qual cosa la figura BCDEF &c. sarà cōpresa da lati eguali: E perche tutti gli angoli sopra le basi degli isosceli, quali sono BCA, ACD, CDA, ADE &c. si sono dimostrati eguali trà loro. Adunque due di loro insieme a due altri insieme presi sarāno eguali, e però l'angolo BCD sarà eguale all'angolo CDE: e così tutti gli altri. Laonde qualsiuoglia delle dette figure BCDE &c. inscritta nel cerchio, sarà equilatera, & equiangola.

g prop. 4. del 1.





Dopoi non hà dubbio, che se in qualsiuoglia delle dette figure si diuideranno *h* tutti gli angoli al centro in parti eguali, e quegli di nuouo si diuidano in altre parti eguali, e così successiuamente, e nella circonferenza del cerchio, si tirino linee rette, che suttendano gli angoli eguali al centro, fin tanto, che le figure restino com-

h prop. 8. del 1.

pite, saranno descritte altre figure equilatere, & equiangole. E cõ tal metodo dal triãgolo equilatero partendosi per mezzo i suoi trè angoli al cẽtro BAC, CAD, DAB, ne verrà la figura esagona, nel secondo luogo il dodecagono, nel terzo la figura di 24. lati, e così di mano in mano. Ma nel quadrato prima ne verrà l'ottangolo poi il sedecagono. Nel pentagono ne vien prima il decagono poi quel di vinti lati &c. finalmente nel quintidecagono ne viene prima la figura di trenta lati, poi quella di sessanta &c. Tutte le quali nella medesima maniera di sopra si dimostraranno equilatere, & equiangole, conforme fu proposto. Ora così fatte figure equilatere, & equiangole chiaminsi regolari di nota descrizzione.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA VI.

Euclid. 7. 12. del 4.

A vn dato cerchio circonscriuere vn triangolo equiangolo ad vn'altro dato, e qualsiuoglia poligono regolare di nota descrizzione.

SIa dato il cerchio ABC, il cui centro F. Deuesi ad esso circonscriuere vn triangolo, che sia equiãgolo ad vn dato triangolo ZXY, e qualsiuoglia altro poligono regolare di nota descrizzione. Si descriua nel detto cerchio *a* il triangolo ABC equiangolo al dato triangolo ZXY, ò

a prop. 3. di questo.

pure

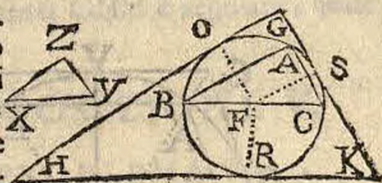
pure vi s'inscriua vn poligono, quale dee esser quello, che si hà da circonscriuere, e dal centro F cadano *b* le FO, FR, FS &c. perpendicolari sopra i lati AB, BC &c. le quali seghino la circonferenza ne i punti O, R, S &c. e per questi punti si tirino *c* le rette linee HG, GK &c. che tocchino il cerchio, e distendansi fin à tanto, che si finisca la figura circonscritta: e poiche alle medesime tangenti *d* sono perpendicolari i medesimi raggi, a i quali erano perpendicolari le applicate nel cerchio.

b *prop.* 11 *del* 1.

c *Dalla prop.* 21. *del* 2.

d *prop.* 23 *del* 2.

Adunque *e* le AB, e GH sono parallele trà di loro, e parimente le BC, HK, e così le altri saranno equidistanti: e



e *prop.* 16. *del* 1.

però *f* formeranno l'angolo GHK eguale all'angolo ABC, e similmente l'angolo G mostrerassi eguale all'angolo A, e l'angolo K eguale all'angolo C, e così tutti gli altri. Per la qualcosa il triangolo circonscritto GHK sarà equiangolo al dato triangolo ZXY, e la figura circonscritta GHKN sarà equiangola, essendo tutti i suoi angoli eguali à quelli della figura regolare inscritta ABCE.

f *Dalla prop.* 7. *del* 4.

Di poi ne i poligoni tirate le rette linee FG, & FA. Perche ne' triangoli GOF, & VGF, *g* due lati GO, e GV sono eguali (per esser lati d'eguali quadrati delle tangenti, tirate dal medesimo pun-

g *Dalla prop.* 22. *del* 4.

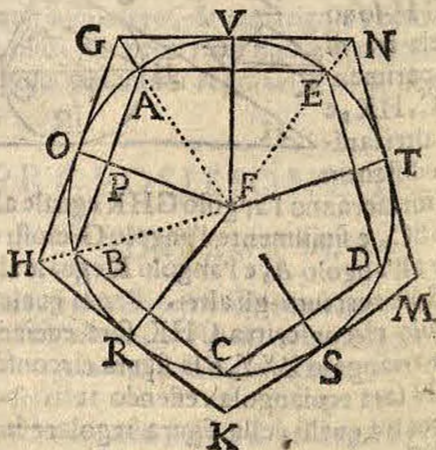
to G) & i raggi FO, FV sono trà loro eguali, ed il lato FG è comune. Adunque *h* gli angoli OGF, & VGF sono trà loro eguali. Ma *i* la retta linea FA diuide parimente per il mezo l'angolo BAE della figura inscritta, e mostrossi l'angolo BAE eguale all'angolo HGN. Adunque le loro metà, cioè gli angoli HG F, e BAF saranno eguali, & è la HG parallela alla BA; adūque *k* la GF sarà parallela alla AF, e concorrono nel punto F, adunque *l* FAG è vna sola linea retta, che dal centro passa per gl'angoli dell'vna, e l'altra figura. Per

h *prop.* 7. *del* 1.

i *Dalla pr.* 3. *di questo.*

k *Dalla prop.* 7. *del* 4.

l *Dalla prop.* 17. *del* 1.



la medesima ragione sarãno linee rette le FBH, FCK, FDM &c. le quali dal centro passano per gl'angoli dell'vna, e dell'altra figura. Poi perche la BA è parallela alla HG base del triangolo

HFG,

HFG, adunque *m* la AB alla GH, stà come la BF alla FH: per la stessa ragione la BC alla HK starà come la medesima BF alla stessa FH; e perciò *n* come la BA alla HG, così starà la BC alla HK: e sono le antecedenti AB, e BC eguali nel poligono regolare inscritto; adunque *o* anche le conseguenti GH, & HK sono eguali tra di loro. Per la stessa ragione i lati KM, MN, NG saranno eguali tra di loro, & à i precedenti GH, NK. Per la qual cosa la figura GHKN sarà equilatera, e si mostrò prima equiangola; adunque *p* la figura circonscritta GHM è regolare, quale si richiedeua.

m *Dalla pr. 6. del 4*

n *prop. 7. del 3.*

o *Dalla prop. 16. del 3.*

p *prop. 3. di questo.*

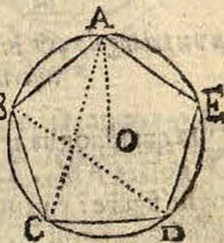
PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA V.

A qualsiuoglia triangolo, ò à qualsiuoglia poligono regolare circonscriuere vn cerchio.

Eucl. 5. 9. e 14. del lib. 4.

Sia qualsiuoglia triangolo, ò poligono regolare ABC. Deuesi ad esso circõscriuere vn cerchio. Tirata la retta AC nel poligono intorno al triangolo ABC descriuasi il cerchio, il cui centro sia O, nella stessa maniera, che si fece nella terza parte della proposizione quattor-



tordicesima del libro secondo. E poi nel poligono si congiunga la retta BD. E perche ne' due triangoli ABC, DCB, i due lati AB, e DC sono eguali, per esser lati di figura regolare, & il lato BG è comune, e gli angoli ABC, e DC B sono fra

a prop. 4. del 1. loro eguali. Adunque *a* gli angoli BAC, e BDC sono eguali fra loro, ed insistono sopra la medesima retta BC cõstituiti verso le medesime parti;

b prop. 14 del 2. adunque *b* la circonferẽza del cerchio, il cui centro è O, tirata per i trè punti A, B, C, passarà ancora per il quarto punto D. Per la medesima ragione la circonferenza di tal cerchio, che passa per i trè punti B, C, D, passará ancora per il punto E, e cosi per gli altri. Per la qual cosa *c* il cer-

c Diff. 2. di queste. chio descritto dal raggio OA sarà circonscritto tanto al triangolo ABC, quãto al poligono ABE. Il che si douea fare.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA VI.

Euclid 4. S. 13. del 4. *In vn triangolo, & in quasiuoglia poligono regolare inscriuere vn cerchio.*

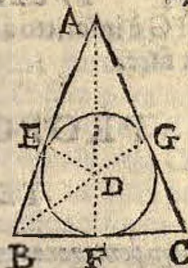
SIa qualsiuoglia triangolo, ouero poligono regolare ABC. Deue inscriuersi vn cerchio in

a prop. 8. del 1. queste figure: e primamente nel triangolo *a* seghinsi gli angoli A, e B in parti eguali dalle rette AD, e BD, le quali concorreranno dentro il tri-

b prop. 11 del 1. angolo, come in D, *b* dal quale concorso cadano

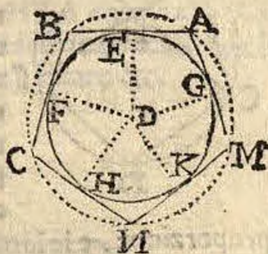
le

perpendicolari DE, DF, e
)G sopra i lati del triangolo.
erche ne' triangoli DBF, e
)BE, i due angoli in B si sono
tti eguali, & i due angoli ad
, & F son retti, cioè ancora
gua li, & il lato DB è comune,
oppoßti à gli angoli retti. A-
nque *c* la DF e eguale alla
)E. Per la medesima ragione ne' triãgoli DEA,
DGA, i lati DG, e DE saranno eguali tra di lo-
). Perloche le trè perpendicolari DF, DE, e
)G (le quali sono le distanze del punto D da i la-
del triangolo) saranno trà di loro eguali. Secõ-



c prop. 25 del 1.

ariamente al poligono
golare si circonscriua
cerchio, *d* il di cui cen-
ro è D: e perche nel cer-
hio ABN le rette appli-
ate AB, BC, CN &c.
ono eguali trà di loro,
aranno dunque egual-
ente *e* distanti dal cen-
ro D, e perciò le perpẽ-
icolari tirate DG, DE, DF, &c. saranno tra di
oro eguali, come erano eguali nel triangolo. Ora
al centro D col raggio DE descritto il cerchio
EFG, passarà necessariamẽte per i punti FG, &c.
f toccherà i lati delle figure ne' punti E, F, G, au-
enga che i raggi DE, DF, DG, &c. sono perpẽ-
icolari a i lati AB, BC, &c. Laonde *g* il cerchio
EFG



d prop. 5 di questo.

è prop. 10 del 2.

f prop. 23 del 2.

g Dif. 2. di questo.

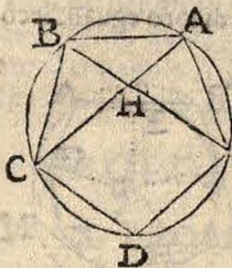
EFG è inſcritto alla figura ABC. Il che biſogna ua fare.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA I.

Euclid.8. del.13.

In vn pentagono regolare due rette linee ſuttendenti gli angoli della figura ſi ſeghino ſcambieuolmente ſecondo l'eſtrema, e meza proportione: e le maggiori loro porzioni ſaranno eguali al lato del pentagono.



SIa il pentagono regolare ABD, e le due rette linee AC, BE ſottendano gli angoli ABC, e AE della figura, e ſi ſeghino nel punto H. Dico tanto la CA, quanto la EB eſſer ſegate nel punto H, ſecondo l'eſtrema, e meza proporzione, e le loro maggiori porzioni CH, e EH eſſere eguali à qualſiuoglia lato del pentagono BA. Si circonſcriua il cerchio *a* ABD al pentagono. Perche *b* nel quadrilatero BEDC inſcritto nel cerchio, i due angoli oppoſti CBE, e D inſieme preſi ſono eguali a due retti & è *c* l'angolo BCD eguale all'angolo D nel pentagono regolare. Adunque i due angoli EBC, e BCD inſieme preſi ſono eguali a due retti; e perciò *d* le due

a prop. 5. di queſto.
b prop.15 del 2.
c prop. 3. di queſto.
d prop.16 del 1.

due rette BE, e CD ſono trà di loro parallele. Per la medeſima ragione ſono anche parallele la CA, e la DE. Laonde *e* CHED ſarà parallelogrammo, nel quale i lati oppoſti CH, e DE ſaranno eguali, e così la HE ſarà eguale alla CD, ouero a qualſiuoglia altro lato BA. In oltre perche gli angoli BAC, & AEB inſiſtono ſopra circonferenze eguali BC, & AB; adũque gli angoli *f* BAC, & AEB ſono eguali, & è l'angolo ABE comune. Adunque *g* i triangoli EBA, & ABH ſono ſimili, e perciò la EB alla BA ſtarà come la AB alla BH; ma dimoſtroſſi la HE eguale alla BA. Adunque *h* tutta la BE alla HE, ſtà come la HE alla HB; e perciò *i* la BE è ſegata nel punto H, ſecondo l'eſtrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione HE è eguale alla BA lato del pentagono. Il medeſimo conchiuderaſſi della ſutteſa CA. Laonde è chiaro &c.

e *prop. 26 del 1.*
f *prop. 17. del 2.*
g *prop. 4. del 4.*
h *prop. 3. e 7. del 3.*
i *prop. 25. del 4.*



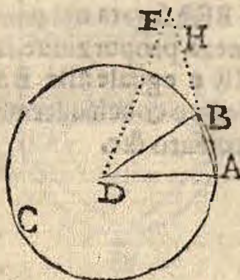
PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA II.

Di Eucl. la 9. del 13.

Se delle figure regolari inscritte nel medesimo cerchi al lato dell'esagono si agiugnerà, ò pure si leuerà vi il lato del decagono; ne verrà vna retta linea segata, secondo l'estrema, e meza proporzione, e la porzione maggiore della composta sarà il lato dell'esagono, e la maggior porzione della scemata sarà il lato del decagono.



a prop. 2. di questo.

NEl cerchio ABC sia la retta linea AB lato del decagono regolare & à questa si aggiunga dirittamente la BE *a* eguale al lato dell'esagono regolare inscrittibile nel medesimo cerchio. Dico la retta AE esser segata nel punto B, secondo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione sara EB. Si tirino le rette dal centro DA, DB, e DE. Perche il lato dell' esagono regolare inscritto nel cerchio, è base del triangolo isosce-le, il qual hà *b* la cima nel centro del cerchio; & è tale angolo al centro la festa parte di quattro retti, ouero la terza parte di due retti, qualsiuoglia *c* dũque de gli angoli eguali alla base di det-

b dalla prop. 3. di questo.
c dalla prop. 18. del 1.

to

lo isoscele, sarà la terza parte di due retti; per lo che cotal triangolo isoscele sarà equiangolo, e per ciò equilatero. Si che la di lui base, ouero il lato dell'esagono sara eguale al raggio del cerchio, al quale s'inscriue l'esagono, e per questo la BE lato dell'esagono inscritto nel cerchio ABC sará eguale al raggio del cerchio DB. E perche *d* l'angolo al centro ADB, al quale è suttesa la AB lato del decagono regolare è la decima parte di quattro retti, ouero la quinta parte di due retti, & i trè *e* angoli del triangolo isoscele ADB sono eguali a due retti. Adunque qualsiuoglia angolo D*B*A alla base è eguale a due quinti di due retti, e perciò l'angolo D*B*A è doppio dell'angolo AD*B*; ma l'angolo *f* A*B*D esteriore nel triangolo D*B*E è eguale à i due interiori, & opposti angoli *B*DE, & E (i quali *g* sono eguali, essendo i suttendenti lati E*B*, *B*D eguali, cioè raggi del cerchio). Adunque l'angolo A*B*D è il doppio dell'angolo E, conforme di sopra era il doppio dell'angolo *h* AD*B*; e perciò gli angoli E, e *B*DA sono eguali tra di loro, & è l'angolo A comune. Adunque *h* i due triangoli EDA, e D*B*A sono simili, e perciò la EA alla AD stà come la DA alla A*B*; & è la E*B* eguale al raggio DA; onde come prima la AD, così adesso la E*B* sara media proporzionale fra la EA, e la *B*A; e per questo *i* la EA sara segata nel punto *B*, secōdo l'estrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione sara la E*B* lato dell'esagono, e la minor porzione sarà la *B*A lato del decagono delle rego-

d *Dalla prop. 3. di questo.*

e *prop. 18. del 1.*

f *prop. 18. del 1.*

g *prop. 6. del 1.*

h *Dalla prop. 4. del 4.*

i *prop. 25. del 4.*

golari inſcritte nel medeſimo cerchio.

Secondariamente dal lato dell'eſagono E*B*, ouero dal raggio del cerchio, ſi leui via la retta *B*H eguale alla *B*A lato del decagono inſcritto nel medeſimo cerchio. Dico la E*B* eſſer ſegata nel punto H, ſecondo l'eſtrema, e meza proporzione, la di cui maggior porzione ſarà *B*H lato del decagono. Imperciòche della E*B* maggior porzione della EA ſegata ſecondo l'eſtrema, e meza proporzione, ſi leua via la *B*H eguale alla porzione minore *B*A. Adunque *k* ancora la *B*E vien ſegata ſecondo l'eſtrema, e meza proporzione, la porzion maggiore della quale ſarà *B*H. Il che biſognaua dimoſtrare.

k *Si caua dalla prop. 25. del 4.*

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA VII.

Aſcriuere in vn dato cerchio due figure regolari ſimili trà di loro; di modo, che la differenza della circonſcritta, ò pure dell'inſcritta dal cerchio ſia minore di qualſiuoglia grandezza propoſta.

Di Archimede pr. 2 del lib. 1. della Sfera, e Cilindro.

SIa il dato cerchio A*B*C, e qualſiuoglia ſuperficie X di qualunque piccolezza. Deuonſi aſcriuerſi nel cerchio le propoſte figure. Si *a* circonſcriua al cerchio A*B*C il quadrato EH, & al contatto A ſi congiunga il raggio DA: e qual proporzione ha il quadrato, *b* che ſia eguale allo ſpazio X, inſieme col quadrato EH al quadrato

a *prop. 4 di queſto.*

b *prop. 21 del 4.*

EH,

EH, così *c* si faccia il quadrato del raggio AD al quadrato della retta linea DG; e dal punto *d* G si tiri la retta GN perpendicolare al diametro, che seghi la circonferenza in N; e *e* si seghi in parti eguali la circonferenza del semicerchio ACB, e di poi in altre parti eguali, e così sempre fino à tanto che l'arco *f* AF sia minore dell'AN: e *g* si seghi l'arco AO eguale all'AF, e si congiunga la retta FO, *h* la quale sarà segata per mezo, e perpendicolarmente dal raggio AD nel punto K. E perche le trè rette SA, FK, NG sono perpendicolari al raggio DA, *i* saranno tra di loro parallele; ma il punto F cade tra le estreme parallele AS, GN; auuenga che l'arco NA è maggiore dell'arco FA. Adũque il punto K cade tra i punti A, e G; e perciò la retta DK sarà maggiore della DG; e si come la AF misura la meza circonferenza AFB; *k* così OF doppia di AF misurerà tutta la circonferenza del cerchio. Si spartisca ora

c *Dalla prop.* 18. *del* 4.
d *prop.* 10 *del* 1.
e *Dalla prop.* 19. *del* 2.
f *Dalla prop.* 27. *del* 2.
g *Dalla prop.* 16. *del* 2.
h *prop.* 19 *del* 2.
i *prop.* 14. *del* 1.
k *Ass.* 1. *del* 5.

tutta la circõferenza del cerchio nelle parti CF, FO, OP, PQ, &c. eguali trà di loro; e si congiungano le rette linee CF, FO, OP, PQ, &c. *l* e si tirino le tangenti SR, RT, TL, &c. parallele à quelle fino à che si *m* compiscono le figure regolari simili la circonscritta SRTV, e la inscritta CFOPB. E manifesto, che il lato RS al suo omologo OF, sta come il raggio DA al DK, e però le figure simili sopra i detti lati, similmente descritte, saranno proporzionali. Laonde la figura SRTV alla figura CFOPB, starà come il quadrato della DA al quadrato della DK: mà *n* il medesimo quadrato della DA al quadrato della maggiore DK, hà minor proporzione, che al quadrato della minore DG; e come il quadrato della DA al quadrato della DG, così staua la sõma dello spazio X, e del quadrato EH al quadrato EH. Si *o* che la figura SRTV alla figura CFOPB ha minor proporzione, che la somma dello spazio X, e del quadrato EH al quadrato EH: e la *p* differenza delle figure SRTV, e CFOB alla figura CFOB, hà minor proporzione, che non hà lo spazio X al quadrato EH: ma il medesimo spazio X *q* alla figura inscritta CFOB, hà maggior proportione che al quadrato circonscritto EH (essendo questo maggiore di quello). Adunque la differenza delle figure SRTV, e CFOB alla figura CFOB, hà minor proporzione, che lo spazio X alla medesima figura inscritta CFOB; e perciò *r* la differenza delle figure SRTV, e CFOB sarà minore dello spazio X. Ed essendo *s* il cer-

chio

l Corol. della pr. 15. di questo.
m Dalla prop 4. di questo, e dalla pr. 18, del 4.
n prop. 2. del 3.
o prop. 6. del 3.
p Corol. della pr. 14. del 3.
q prop. 2. del 3.
r prop. 5. del 3.
s Ass. di questo.

chio ABC maggiore della figura inscritta CFOB, e minore della figura circonscritta SRTV, l'eccesso della figura circonscritta sopra il cerchio, ouero il difetto delle figura inscritta dal medesimo cerchio, sarà minore della differenza della circonscritta figura SRTV, e dell'inscritta CFOB. Ma la differenza di queste figure ascritte si è dimostrata minore della grandezza X. Adunque la differenza della circonscritta figura SRTV, ouero della inscritta CFOB dal medesimo cerchio ABC è minore di qualunque grãdezza proposta X. Il che douea farsi.

PROPOSIZIONE X.

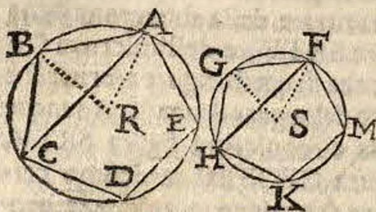
TEOREMA III.

I poligoni simili, ò circonscritti, ò pure inscritti ne i cerchi, anno duplicata proporzione di quella de i loro raggi. *D' Eucl. 1. del 12.*

SIeno i due poligoni simili ABD, e FGK inscritti, ò pure circõscritti ne' cerchi, i cẽtri de' quali sieno R, & S. Dico che gl'inscritti tra di loro, ouero i circonscritti anno duplicata proporzione di quella de i raggi de' medesimi cerchi. E primieramente negli inscritti si tirino le rette AC, HF sottendenti gli angoli eguali B, e G, e si cõgiungano i raggi RA, RB, e SF, & SG. Perche intorno a gli angoli eguali B, e G, i lati AB a BC, & FG a GH sono proporzionali (per cagione della

a prop. 6. del 4. b prop. 13 del 2.

similitudine delle figure). Adunque *a* i triangoli ABC, FGH sono simili; e perciò gli angoli ACB, & FHG sono eguali; ma *b* gli angoli al centro R, & S sono doppi degli angoli alla circonferenza ACB, & FHG; adunque gli angoli R, & S sono eguali, e intorno a loro i lati, ouero raggi de i cerchi sono nella medesima proporzione di egualità. Adunque *c* i triangoli ABR, & FGS sono simili; e perciò *d* come la AB alla FG, così sarà il raggio AR allo FS, e *e* saranno ancora medesime le loro duplicate proporzioni. Ma il *f* poligono ABD al poligono FGK, hà duplicata proporzione di quella del lato AB al suo omologo FG. Adunque *g* la proporzione del poligono ABD al poligono FGK è duplicata della proporzione del raggio AR al raggio FS.



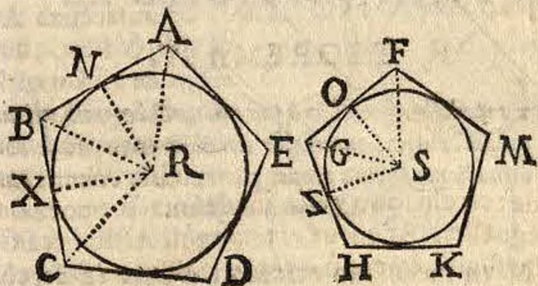
c prop. 6. del 4. d dalla prop. 4. del 4. e Dalla prop. 19. del 3. f prop. 17. del 4. g prop. 4. del 3.

Secondariamente nelle figure circonscritte da gli angoli eguali A, & F, e da gli eguali B, e G à i centri, si congiungano le rette AR, FS, BR, GS, & a i contatti N, O, X, Z, si congiungono i raggi NR, OS, XR, ZS. Perche *h* le due BN, BX sono eguali, essendo lati degli eguali quadrati delle tangenti, tirate dal medesimo punto, e i due raggi NR, XR sono ancora eguali, & RB comune. Adunque *i* ne due triangoli BNR, e BXR, i

h Dalla prop. 22. del 4. i prop. 7. del 1.

due

due angoli RBN, & RBX sono eguali, e perciò l'angolo RBN sarà la metà dell'angolo ABC. Per la medesima ragione l'angolo RAN sarà la metà dell'angolo BAE; e parimente nell'altra figura l'angolo SGO, sarà la metà dell'angolo FGH



del poligono; parimente l'angolo SFO sarà la metà dell'angolo GFM. E perche i due angoli RAN, & SFO sono eguali, essendo la metà degli angoli eguali BAE, & GFM; e i due *k* angoli retti ad N, & O sono eguali: adunque *l* i due triangoli ANR, & FOS sono simili; e perciò *m* la AN alla FO, starà come la NR alla OS. Per la medesima ragione i due triangoli BNR, & GOS saranno simili, e per questo *n* la BN alla GO, sarà come la medesima NR alla medesima OS. Per la qual cosa *o* le due linee AN, & NB insieme alle due FO, & OG, cioè il lato AB al lato FG, starà come il raggio NR al raggio OS, e le *p* loro duplicate proporzioni saranno ancora le medesime.

k *prop. 23 del 2.*
l *prop. 4. del 4.*
m *prop. 4. del 4.*
n *Dalla prop. 4. del 4.*
o *prop. 15 del 3.*
p *Dalla prop. 19. del 3.*

Laonde, come sopra, il poligono ABD al poligono FGK, auerà duplicata proporzione di quella che hà il raggio NR al raggio OS. Il che conueniua dimostrare.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA IV.

Eucl. 33. del.6.

In vn medesimo cerchio, ò pure in cerchi eguali, gli angoli al centro, ouero alle circonferenze, e i settori anno la medesima proporzione, che le circonferenze alle quali insistono.

IN vn medesimo cerchio, ò pure in cerchi eguali sieno primamente i due angoli al centro ABC, & EBG insistenti alle circonferenze AC, & EG. Dico che la medesima proporzione ha l'arco AC all'arco EG, che hà l'angolo ABC all'angolo EBG. Si seghi *a* l'arco EG in parti eguali, ed in parti eguali di nuouo, e così di mano in mano si soddiuidano gli archi interposti, fino *b* che si giunga all'arco EM, il quale sia minore di qualunque arco, che si possa assegnare. E nell'arco CA si *c* pigli l'arco CS moltiplice dello EN, di maniera, che il di lui eccesso, ouero diffetto SA dalla AC sia eguale, ò minore dell'EM, e perciò sara minore di qualunque grandezza data; e si congiunghino i raggi BM, BS. Perche quante *d* volte l'arco EM misura l'arco EG, tante volte l'angolo EBM misura l'angolo EBG, e pari-

a *Dalla prop. 19 del 2.*

b *Dalla prop. 27. del 2.*

c *dalla prop. 16. del 2.*

d *Corol. dalla pr. 17. del 2.*

parimente quante volte l'arco EM misura l'arco CS, tante volte l'angolo EBM misura l'angolo SBC. Adunque *e* l'arco SC sarà le medesime *e Diff. 6. del 3.*
parti dell'arco EG, si come l'angolo SBC è parti dell'angolo EBG. E perche se *f* l'arco SC è eguale allo AC, l'angolo SBC è necessariamẽte eguale all'angolo ABC (& all'ora è manifesto ciò, *f Dalla prop. 17. del 2.*
che si propose). Ma se *g* l'arco SC è maggiore dell'AG, l'angolo SBC insistente alla maggiore circõferenza, sarà necessariamẽte maggiore dell'angolo ABC; e se l'arco SC sarà minore dello AC, sarà l'angolo SBC minore dell'angolo ABC. Laonde ci sono quattro grandezze: la prima è l'arco AC, la seconda l'arco EG, la terza l'angolo ABC, e la quarta l'angolo EBG; e di più due altre grandezze, cioè l'arco SC, e l'angolo SBC sono le medesime parti delle conseguenti, cioè a loro anno la medesima proporzione, e sono insieme maggiori, ò insieme minori delle antecedenti, di modo che lo eccesso, ouero il diffetto della prima è minore di qualunque assegnabile quantità. Adunque *h* l'arco AC all'arco EG, stà come l'angolo ABC all'angolo EBG. Il che facea di mestieri dimostrare. *g Dalla stessa.* *h prop. 24 del 3.*

Secondariamente sieno alla circonferenza i due angoli ADC, & EDG insistenti alle circonferenze AC, & EG del medesimo, ouero de' cerchi eguali. Dico che l'angolo ADC all'angolo EDG, stà come l'arco AC all' arco EG. Si facciano gli angoli al centro ABC, & EBG. Perche i l'angolo ADC è la meta dell' angolo al centro ABC, e l'angolo EDG è la metà dell' angolo EBG. Adunque k come l'angolo ABC all' angolo EBG, così sta l'angolo ADC all' angolo EDG; ma come l'angolo ABC all'angolo EBG, così sta la circonferenza AC alla circonferenza EG (per la prima parte di questa proposizione). Adunque l come l'angolo ADC all'angolo EDG, così sta la circonferenza AC alla circonferenza EG. Il che bisognaua prouare nel secondo luogo.

i *prop.* 13 *del* 2.

k *prop.* 11 *del* 3.

l *prop.* 7. *del* 3.

Nel terzo luogo nel medesimo, ouero ne' cerchi eguali. Dico che il settore ABC al settore EBG, hà la medesima proporzione, che l'arco AC, che è la base del primo, all'arco EG, che è la base dell'altro settore. Fatta la costruzzione, come sopra, s'intendono dette de' settori tutte quelle cose, le quali dette si sono de gli angoli al centro. Per la qualcosa m il settore SBC sarà le medesime parti del settore EBG, quali parti è l'angolo SBC dell'angolo EBG, ò pure quali parti è l'arco SC dell' arco EG. Di più n l'arco SC dell'arco AC, e il settore SBC del settore ABC saranno insieme maggiori, ò pure insieme minori. Laonde ci sono quattro grandezze, cioè l'arco AC, l'arco EG, il settore ABC, & il settore EBG,

m *Dif.* 6. *del* 3.

n *Dalla prop.* 17. *del* 2.

e due

e due altre, cioè l'arco SC, & il settore SBC sono le medesime parti delle conseguenti, cioè dell'arco EG, e del settore EBG, le quali sono denominate dal numero, che ne viene per il continouo spartimento delle consequenti; & insieme eccedono, ouero insieme mancano dalla prima, e dalla terza, cioè dall'arco AC, e dal settore ABC, e l'eccesso della SC dalla prima AC, ò pure il diffetto è minore di qualsiuoglia dato. Adunque *o* l'arco AC all'arco EG, hà la medesima proporzione, che il settore ABC al settore EBG. Il che doueasi vltimamente dimostrare. *o prop. 24 del 5.*

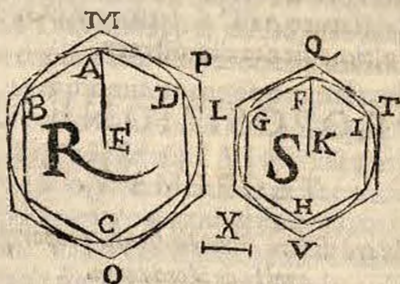
PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA V.

I cerchi trà di loro anno duplicata proporzione di quella de i loro raggi. *Di Eucl. la 2. del 12.*

SIeno due cerchi R, & S, i raggi loro AE, & FK. Dico che il cerchio R al cerchio S, hà duplicata proporzione di quella, che hà il raggio AE al raggio FK, ò pure la medesima, che ha il quadrato di AE al quadrato di FK. Si *a* ascriuano nel cerchio R due poligoni regolari simili ABCD, & MNOP, di modo che l'eccesso della figura MNOP circonscritta sopra il cerchio, & il diffetto della figura ABCD inscritta dal medesimo cerchio R, sia minore di qualunque grandezza proposta. Si ascriuano *b* in oltre al *a prop. 9. di questo.* *b Dalla prop. 4. di questo.*

ai cerchio S due figure FGHI, e QLVT simili al-
c prop. 10. ai questo. le figure ABCD, & MNOP. E manifesto, che c le simili figure circonscritte MNOP, e QLVT tra di loro, e parimente le simili figure inscritte ABCD, & FGHI auranno trà di loro duplicata proportione di quella del raggio EA al raggio KF, ò pure staranno come il quadrato di AE al quadrato di FK. E perche il cerchio S è minore



del poligono TQV a lui circonscritto. Adunque d il poligono MNO al cerchio S, hà maggior proportione, che al poligono TQV: ma il poligono MNO al poligono TQV, hà la medesima proportione, che hà il quadrato di AE al quadrato di FK. Adunque il poligono e MNO (cioè la quantità eccedente il cerchio R d'vn' eccesso minore di qualunque dato) hà maggior proportione al cerchio S, che il quadrato di EA non hà al quadrato di FK. Similmente perche il cerchio S è mag-

d prop. 2. del 3.

e prop. 6. del 3.

maggiore del poligono a lui inscritto FGH. Adunque il poligono *f* ABC al cerchio S, ha minor proporzione, che al poligono FGK: ma il poligono ABC al poligono FGH, ha la medesima proporzione, che il quadrato di AE al quadrato di FK. Adunque il poligono inscritto *g* ABC (minore del cerchio R d'vn diffetto minore di qualunque assegnato) ha minor proporzione al cerchio S, che il quadrato di AE al quadrato di FK; e perciò *h* il cerchio R al cerchio S, starà come il quadrato di AE al quadrato di FK, cioè in vera duplicata proporzione del raggio AE al raggio FK. Il che bisognaua dimostrare.

f prop. 2. del 3.

g prop. 6. del 5.

h Schol. della pr. 24. del 5.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA VI.

Il cerchio è eguale al triangolo, la di cui base è eguale alla circonferenza, e l'altezza al raggio dello stesso cerchio.

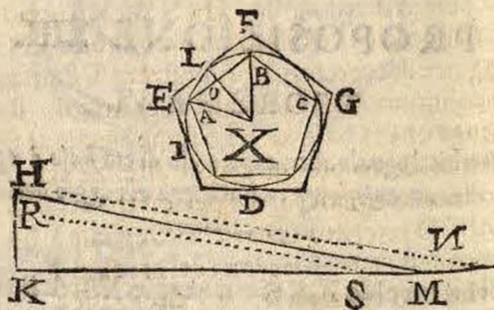
D'Archimede della misura del cerch. prop. 1.

Sia il cerchio X, il di cui raggio XB, & il triangolo HKM, la base del quale KM sia eguale all'intiera circonferenza ABD, e l'altezza, ouero la perpendicolare HK sia eguale al raggio del cerchio XB. Dico che il cerchio è eguale al triangolo HKM. Si ascriuano *a* al cerchio X due poligoni regolati, e simili trà loro EFG fuori, & ABC dentro lo stesso, di maniera che la loro differenza dal cerchio sia minore di qualunque asse-

a prop. 9. di questo.

gna-

b prop. 11 del 1. gnata grandezza. Di poi *b* tirata la XO perpendicolare dal centro al lato della figura inscritta, c prop. 3. del 1. e si congiungano le rette XF, XE, & XA, e si faccia KN eguale al perimetro del circonscritto poligono EFGI, e KS eguale al perimetro della figura ABCD, & RK eguale alla perpendicolare XO, e si congiungano le rette HN, & RS. Perche *d* il poligono regolare EFGI può diuidersi in d Dalla prop. 3. di questo. tanti triangoli isosceli eguali trà di loro (i quali anno la cima nel centro X, vno de' quali è XFE) quanti sono i di lui lati, e sono i detti triangoli egualmẽte alti, perche le loro altezze sono i rag-



e Dif. 5. del 3. gi eguali all'XL, ouero all'HK. Adunque *e* il poligono EFGI è tanto moltiplice del triangolo EXF, quanto il perimetro del medesimo poligono è moltiplice d'vn lato EF; ma KN è eguale al perimetro EFGI del detto poligono. Adunque *f* co- f prop. 5. del 3. me KN ad EF, così stà il poligono EFGI al triangolo EXF; ma *g* il triangolo KHN al triango- g prop. 1. del 4.

lo EFX (auendo eguali altezze, cioè le perpendicolari XL, & HK) stá come la base KN alla base EF. Siche *h* il poligono EFGI, & il triangolo HKN anno al triangolo EXF la proporzione medesima; e perciò *i* eglino sono eguali tra di loro. Di poi perche le rette *k* linee inflesse IEL cadenti fuori del cerchio, sono maggiori dell' arco IAL. Adunque il perimetro della figura FGI sarà maggiore di tutta la circonferenza del compreso cerchio X: ma si pose KN eguale al perimetro EFGI, e KM eguale alla circonferenza del cerchio X. Adunque KN è maggiore di KM. Ma i triangoli HKN, & HKM sono egualmente alti: perciò il triangolo *l* HKN sarà maggiore del triangolo HKM; si come il poligono EFGI è maggiore del cerchio X; dimostrerassi similmente il poligono ABCD eguale al triangolo RKS, auuenga che la base *m* KS si pone eguale al perimetro del detto poligono, e le altezze RK, XO sono ancora eguali; & *n* il perimetro del poligono ABCD inscritto, ouero la KS eguale à lui, è minore della circonferenza del cerchio X, ouero della KM eguale a lei, e l'altezza RK, ouero XO è minore dell'altezza HK, ouero del raggio. Adunque il triangolo RKS è minore del triangolo HKM, sì come il poligono ABCD è minore del cerchio X. Ora essendo il poligono FEG eguale al triangolo HKN, & il triangolo HKN maggiore del triangolo HKM. Adunque la circonscritta figura FEG (la quale è maggiore del cerchio X d'vn'eccesso minore di qualũque dato) è ezian-

h *prop. 7. del 3.*

i *prop. 4. del 3.*

k *Assio. di questo.*

l *Dalla prop. 32. del 1.*

m *prop. 1. del 4.*

n *Ass. di questo.*

eziandio maggioredel triangolo HKM. Et esse
do similmente la figura ABD eguale al triang
lo RKS, & il triangolo RKS minore del triang
lo HKM. Adunque la inscritta figura ABD (
quale è minore del cerchio X d'vn d ffetto min
re di qualūque dato) è minore eziandio del tria
o Scolio della 24. del 3. golo HKM; e per questo *o* il cerchio X è eguale
triangolo HKM. Il che bisognaua &c.

COROLLARIO.

Quindi è, che il triangolo, la di cui base sia eguale al perimetro di qualsiuoglia figura reg lare, e l'altezza sia eguale alle perpendicolar tirate dal cētro della figura al di lui lato; e egua le alla medesima figura regolare. Poiche si è d mostrato il triangolo KHN (che ha le dette cō dizioni) eguale al poligono regolare EFGI.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA VII.

Di Pappo la 11. del 5. *Le circonferenze anno trà di loro la medesima propo zione, che i raggi de i medesimi cerchi.*

Sieno i cerchi R, & S, i raggi de' quali RA, SC. Dico che il raggio RA al raggio SC, sta co me la circonferenza ABA alla circonferenz CDC. S'intenda il triangolo V, la cui base F sia eguale alla çircōferenza ABA, e l'altezza E

egua-

eguale al raggio RA. S'intenda similmente il triangolo X, la di cui base KM sia eguale alla circonferenza CDC, e l'altezza HK sia eguale al raggio SC. E manifesto, *a* che il triangolo V è eguale al cerchio R, & il triangolo X è eguale al cerchio S; e perciò *b* il triangolo V al triangolo X, starà come il cerchio R al cerchio S. E perche il cerchio *c* R al cerchio S hà duplicata proporzione di quella, che hà il raggio RA al raggio SC. Adunque *d* il triangolo V al triangolo X hà duplicata proporzione di quella, che hà RA ad SC, ouero *e* duplicata di quella, che hà l'altezza EF all'altezza HK (essendo fatte eguali RA, & EF frà di loro, & SC, HK tra di loro) ed essendo *f* la proporzione del triangolo V al triangolo X composta della proporzione del lato EF al lato HK, e della proporzione della base FG alla base KM intorno a gli angoli retti F, K eguali. Adunque *g* la proporzione della base FG alla base KM, è la medesima che quella di EF alla HK, ouero *h* che ha la RA alla SC. Ed è la FG eguale alla circonferenza BA, e KM eguale alla circonferenza CDC.

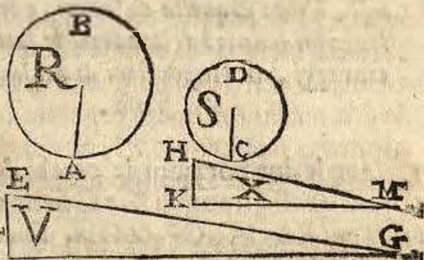
a prop. 13. di questo.

b prop. 3. del 3.

c prop. 12. di questo.

d prop. 7. del 3.

e prop. 3. del 3.



f prop. 15. del 4.

g Dalla prop. 19. del 3.

h prop. 3. del 3.

Adun-

Adunque *i* la circonferenza ABA alla circonferenza CDC, hà la medesima proporzione, che il raggio RA al raggio SC; come douea dimostrarsi.

i prop. 7. del 3.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA VIII.

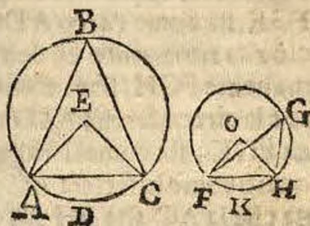
Se le porzioni di due cerchi conterranno angoli eguali, saranno proporzionali à suoi cerchi; e trà di loro aueranno proporzione duplicata di quella delle suttese, ò pure di quella de' raggi, e le loro circonferenze saranno trà di loro come le suttese, ouero come raggi. Ora le porzioni di tal sorte si chiamino simili.

Di Pappo la 13. del 5.

SIeno le due porzioni de' cerchi ABC, & FGH, ne' quali gli angoli B, e G sieno eguali. Tirati i raggi EA, EC, OF, & OH. Dico che la porzione ABC al cerchio ABCD, stà come la porzione FGH al cerchio FGHK; e le porzioni ABC, & FGH anno duplicata proporzione di quella de' raggi EA, & OF, ouero delle suttese AC, & FH; e le circonferenze ABC, FGH stanno come AC ad FH. Perche gli angoli B, e G si pongono eguali; Adunque *a* i loro doppi al centro E, & O saranno eguali; e perciò *b* i quattro angoli retti a gli angoli eguali E, & O aueranno la medesima proporzione; ma come *c* i quattro retti all'angolo E, così stà il cerchio ABD al settore

a prop 13. del 2.
b prop. 3. del 3.
c Dalla prop 11. di questo.

tore AECD; & ezianlio come i quattro retti all'angolo O, così stà il cerchio FGK al settore FOHK. Adunque *d* come il cerchio ABC al settore AECD, così starà il cerchio FGH al settore FOHK. E permutando *e* come il cerchio ABD al cerchio FGK, così starà il settore AECD al settore FOHK: ma *f* anno i cerchi trà di loro proporzione duplicata de' raggi EA ad OF. Adunque *g* i settori aueranno la medesima proporzione duplicata del raggio BA ad OF; e sono *h* i triangoli AEC, & FOH simili (per essere isosceli, & hauere gli angoli alla cima E, & O eguali) adunque *i* il triangolo EAC, al triangolo OFH hà duplicata proporzione di quella, che hà il raggio EA al raggio OF, ouero la suttesa AC alla FH. Laonde *k* come il settore EADC al settore OFKH, così stà il triangolo EAC al triangolo OFK. Si che *l* la rimanente porzione ACD alla porzione FKH, auerà la medesima proporzione de i settori, ò pure de' cerchi; e perciò *m* l'altra porzione ABC alla porzione FGH, auerà eziandio la medesima proporzione del cerchio ABD al cerchio FGK, ò *n* pure auerà proporzione duplicata del raggio EA al raggio OF, ouero della suttesa AC alla suttesa FH.



d prop. 7. del 3.
e prop. 14 del 3.
f prop. 12. di questo.
g prop. 7. del 3.
h prop. 4. del 4.
i prop. 15. del 4.
k prop. 7. del 3.
l prop. 15. del 3.
m Dalla stessa.
n prop. 7. del 3.

Finalmente perche gli angoli à i centri AEC,

o Dalla prop. 11. di questo. FOH sono eguali: adunque o tutta la circonfe-
renza del cerchio ABCA all'arco ADC, stà co-
p prop. 3. del 3. me i quattro retti all'angolo AEC, ouero p all'
angolo a lui eguale FOH: e parimente tutta la
circonferenza del cerchio FGHF all'arco FKH
ha la medesima proporzione, che anno i quattro
q prop. 7. del 3. retti all'angolo FOH: per lo che q come la cir-
conferenza del cerchio ABCA all'arco ADC
così starà la circonferenza del cerchio FGHF
r prop. 12. del 3. all'arco FKH. E permutando r la circonferenza
del cerchio ABD alla circonferenza del cerchio
FGK, stà come l'arco ADC all'arco FKH; e per-
ciò s la rimanente circonferenza ABC alla ri-
s prop. 15. del 3. manente FGH, starà come tutta a tutta; ma tut-
t prop. 14 di questo. ta t la circonferēza ABD a tutta la circonferen-
za FGK, stà come il raggio EA al raggio OF,
ouero come la suttesa AC alla suttesa FK (auuen-
u prop. 7 del 3. ga che la AC alla FH era come la EA alla OF)
adunque u la circonferenza ABC alla circonfe-
rēza FGH, stà come la suttesa AC alla retta sut-
tesa FH, ò pure come il raggio AE al raggio FO
come fù proposto. S chiamino ora le porzioni
ABC, & FGH contenenti gli angoli eguali B, e
G simili tra di loro.



PRO-

PROPOSIZIONE XVI.

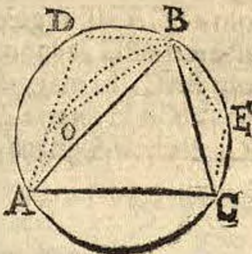
TEOREMA IX.

In qualsiuoglia triangolo, l'angolo maggiore al minore hà maggior proporzione, che il lato opposto al l' angolo maggiore, non hà al lato opposto all' angolo minore.

Di Tolomeo nell' Almag. lib. 1. c. 9.

NEl triangolo ABC sia l'angolo C maggiore, e l'angolo A minore. Dico che l'angolo C hà maggior proporzione all'angolo A di quella, che ha il lato AB al lato BC. Intorno al triangolo *a* descriuasi il cerchio ABC, e si seghi l'arco BC doue si voglia nel punto E: e si faccia *b* l'arco BD eguale a BE, e si cõgiugano le rette linee CE, BE, AD, BD. E perche *c* l'arco ADB, al quale insiste l'angolo maggiore C è maggiore dell' arco BEC; e gli archi BD, e BE sono eguali; adunque l'arco rimanente AD sarà maggiore del rimanente arco CE, e perciò *d* l'angolo ABD sarà maggiore dell' angolo CBE. Si faccia adesso *e* l'angolo ABO eguale al minore angolo EBC; l'angolo dũque ABD sarà maggiore dell'angolo ABO; e perciò la retta

a *prop. 5. di questo.*
b *dalla prop. 16. del 2.*
c *dalla stessa.*
d *Dalla prop. 17. del 2.*
e *prop. 24 del 1.*



ta BO feghera la retta AD nel punto O, posto tra A, e D; e per questo il punto O sarà dentro la porzione del cerchio ADB. Descriuasi *f* per i trè punti A, O, e B la circonferenza del cerchio AOB, ella cadera dentro la porzione ADB. E perche ne' triangoli AOB, e CEB *g* i due angoli OAB, ECB sono eguali (insistendo nelle eguali circonferenze BD, e BE); e parimente i due angoli OBA, EBC sono eguali; adunque *h* gli altri angoli AOB, e CEB saranno eguali; e perciò la circonferenza *i* AOB alla circonferenza BEC, sarà come la suttesa AB alla suttesa retta linea BC; e l'arco *k* ADB è maggiore dell'arco AOB (essendo questo contenuto da quello). Adunque *l* l'arco ADB ha maggior proporzione al medesimo arco BC, che l'arco AOB, *m* e perciò l'arco ADB all'arco BEC, auerà maggior proporzione, che la retta linea AB alla retta BC. Et è l'angolo *n* BCA all'angolo BAC, come l'arco ADB all'arco BEC, adunque *o* l'angolo BCA all'angolo BAC, ha maggior proporzione di quella, che s'abbia la sottesa AB alla sottesa retta linea BC. Il che bisognaua dimostrare.

f Dalla prop. 16. del 2.

g Dalla prop. 17 del 2.

h Dalla prop. 16 del 1.

i prop. 15. di questo

k Assio di questo.

l prop. 2. del 3

m prop. 6 del 3.

n prop. 11 di questo.

o prop. 6. del 3.



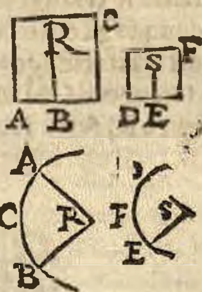
PRO-

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA X.

Trà due figure simili regolari, ò pure trà due cerchi, ò settori simili, è medio proporzionale il triangolo, la cui altezza è eguale al raggio dell' vna, e la base è eguale al perimetro dell' altra.

SIano due qualunque figure regolari simili trà di loro, ouero due settori simili, ò due cerchi R, & S, i raggi de' quali siano RB, & SE; e sia il triangolo rettangolo GHM, la di cui altezza GH sia eguale al raggio SE d'vna delle figure S, e la base HM sia eguale a BAC perimetro dell' altra figura R. Dico il triangolo GHM esser medio proporzionole trà le figure R, & S. Si *a* faccia l'altezza NH eguale al raggio RB, e la base HO eguale al perimetro EDF, e si congiungano le rette NM, e GO; perche nelle simili figure regolari, ouero ne' settori simili, ò pure ne' cerchi R, & S, come *b* il raggio RB al raggio SE, così sta il perimetro ABC al perimetro DEF, & è la NH eguale alla RB, e la GH eguale alla SE, e la HM eguale al perimetro ABC, e similmẽte HO eguale a DEF.



a *prop. 3. dei 1.*

b *prop. 14 del questo.*

c prop. 3. del 3.

d Dalla prop. 1. del 4.

e prop. 7. del 3.

Adunque c come NH ad HG, così stà MH ad HO; ma come l'altezza d NH a GH, così stà il triangolo NHM al triangolo GHM (auendo la medesima base HM) e come la base MH alla base HO, ouero e come NH a GH, così stà il triangolo GHM al triangolo GHO. Adunque il triangolo GHM è medio proporzionale trà due triangoli NHM, e GHO; ma il f triangolo rettangolo HNM è eguale alla figura R, essendo cõtenuto dal raggio, e dal perimetro della detta figura R, e parimente il triangolo GHO è eguale alla figura S; adunque g come la figura R al triangolo GHM, così stà il triangolo GHM alla figura S; e perciò il triangolo GHM è medio proporzionale trà le figure R, & S. Il che bisognaua &c.

f dalla pr 13. di qu.

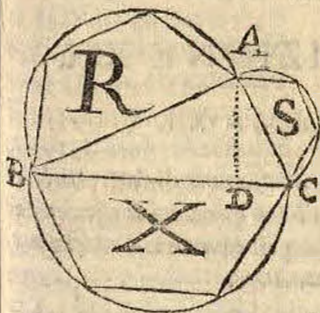
g prop. 3. del 3.

PRO-

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XI.

Ne' triangoli rettangoli qualunque figura rettilinea, ouero circolare descritta sopra l' ipotenusa, ò lato sottendente, l'angolo retto è eguale à due figure simili à quella, e similmente descritte sopra i lati contenenti angolo retto. D' Eucl. la 47. del 1. è la 31. del 6.



SIa il triangolo ABC rettangolo in A, e sopra i trè suoi lati si descriuano trè qualunque figure X, R, & S simili trà di loro, e similmente poste, ò sieno settori, ò cerchi, ò fasce, ò quadrati, ò altre figure rettilinee. Dee dimostrarsi la figura X descritta sopra l'ipotenusa BC esser eguale alle due figure R, & S a loro simili, e similmente descritte sopra i lati BA, & AC. Dall'angolo retto *a* A, si tiri la perpendicolare AD sopra la BC. E manifesto, che la *b* CB alla BD ha duplicata proporzione di quella, che ha la CB alla BA; e parimente la BC alla CD ha duplicata proporzione di quella, che ha la BC alla CA. E perche la *c* X alla R

a prop. 11. del 1.
b prop. 9. del 4. & prop. 19. del 5.
c prop. 17 del 4.

(per essere figure simili, e similmente poste) hà duplicata proporzione di quella del lato BC al suo omologo BA. Adunque *d* la X alla R, sta come la CB alla BD. Per la medesima ragione la figura X alla figura S auera la medesima proporzione, che la BC alla CD. Adunque la figura *e* X alle due figure R, & S auerà la medesima proporzione, che la BC alle due BD, e DC insieme prese; ma la BC è eguale alle due BD, e DC. Adunque *f* la figura X è eguale alle due figure R, & S insieme prese. Il che bisognaua &c.

d *Dalla prop. 19. del 3.*
e *Dalla prop. 22. del 3.*
f *Corol. della pr. 16. del 3.*

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XII.

Dì Eucl. la 4. del 2.

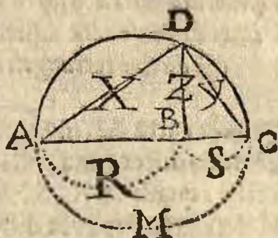
Il quadrato descritto sopra la somma di due rette linee è eguale alla somma di due quadrati di esse con due parallelogrammi rettangoli contenuti dalle stesse rette linee.

SOpra le rette AB, BC, e sopra la loro somma AC siano descritti i quadrati R, S, & M. Dico che il quadrato M è eguale alla somma dei quadrati R, & S, con due rettangoli contenuti da AB in BC. Sopra la AC come diametro descriuasi il semicerchio ADC, e *a* si eleui dal punto B la retta BD perpendicolare ad AC, che incontri la circonferenza in D, e si congiungano le rette linee AD, e DC, e *b* sopra le stesse si descriuano i quadrati X, Z, & Y. Perche nel triangolo

a *prop. 10 del 1.*
b *prop. 34 del 1.*

gola

golo ADC rettangolo *c* in D (per essere nel semicerchio) il *d* quadrato M descritto sopra la ipotenusa AC, è eguale a i due quadrati X, & Y descritti sopra i lati AD, e DC. Ma nel triangolo ADB rettangolo in B, *e* i due quadrati R, e Z descritti sopra i lati AB, e DB sono eguali al quadrato X descritto sopra l'ipotenusa AD, e parimente nel triangolo DBC rettangolo in B, *f* i due quadrati S, e Z sono eguali al quadrato Y; adunque i quattro quadrati R, S, & il Z due volte preso, sono eguali a i due quadrati X, & Y insieme presi; & a questi stessi quadrati X, & Y, prima era eguale il quadrato M, adunque il quadrato M sarà eguale a quattro quadrati, cioè ad R, & S, & al doppio di Z. Poi perche nel triangolo ADC dall'angolo retto D cade la DB perpendicolare alla AC, *g* sarà la AB alla BD, come la BD alla BC; e però *h* il quadrato Z della media proporzionale BD, sarà eguale al parallelogrammo rettangolo ABC contenuto dall'estreme. Per la qual cosa il quadrato M sarà eguale alla somma de i quadrati R, & S, con il doppio del rettangolo ABC. Il che &c.



c *prop. 20 del 2.*

d *prop. 18 di questo.*

e *Per l'istessa.*

f *L'istessa*

g *prop. 9. del 4.*

h *Corol. 2. della prop. 14. del 4.*

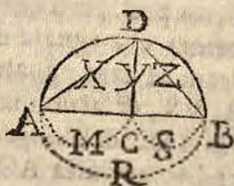
PRO-

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XIII.

D' Eucl. la 7. del 2. *Il quadrato descritto sopra alla differenza di due rette linee è eguale alla differenza di due quadrati di esse da due rettangoli contenuti dalle stesse.*

SIa la retta AB maggiore, e BC la minore, e la loro differenza AC, e sopra di esse siano descritti i quadrati R, S, M. Dico che il quadrato M descritto sopra la differenza AC è eguale all'eccesso di due quadrati R, & S descritti sù le stesse rette linee, sopra il doppio del rettangolo ABC contenuto dalle stesse.



Sopra il diametro AB descriuasi, come prima, il semicerchio ADB, e *a* si eleui la perpendicolare CD, e si congiungano le rette AD, BD, *b* e descriuasi sopra essei quadrati X, Y, e Z. Per-

a *prop.* 10 *del* 1.

b *prop.* 34 *del* 1.

c *Dalla prop.* 19. *di questo.* che *c* il quadrato R della somma delle rette AC, e CB è eguale alla somma de' quadrati S, & M, con il doppio del quadrato Y. Adunque aggiunto communemente il quadrato S, saranno i due quadrati R, & S insieme presi eguali al quadrato M al doppio del quadrato S, con il doppio del quadrato Y insieme preso: ma *d* nel triangolo rettãgolo BCD il doppio del quadrato Z descrit-

d *prop.* 18 *di questo.*

to

to sopra l'ipotenusa, è eguale al doppio del quadrato S, con il doppio del quadrato Y: adunque i due quadrati R, e S insieme sono eguali al quadrato M, con il doppio del quadrato Z; ma *e* la BD è media proporzionale frà le AB, e BC. e però *f* il quadrato Z della media proporzionale, sarà eguale al rettangolo ABC contenuto dall'estreme. Laonde i due quadrati R, & S saranno eguali al quadrato M, con il doppio del rettangolo ABC. Per la qual cosa il quadrato M descritto sopra la differenza AC, sarà eguale all'eccesso de' due quadrati R, & S sopra il doppio del rettangolo ABC. Il che bisognaua dimostrare.

e Dalla prop. 10. del 4.

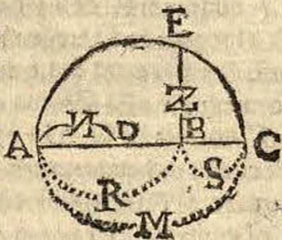
f Corol. 2. della pr. 14. del 4.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XIV.

Il quadrato descritto sopra la somma di due rette linee è eguale al quadrato della differenza di esse con quattro parallelogrammi rettangoli contenuti dalle medesime.

Sia di nuouo la retta AB maggiore, e BC minore, e *a* fatta la BD eguale alla minore BC, sarà AC la somma, & AD la differenza delle medesime rette AB, BC: e *h* si descriuano sopra



a prop. 3. del 1.

b prop. 34. del 1.

se

le dette rette linee i quadrati R, S, & M sopra la somma, & N sopra la differenza. Dico che il quadrato M sará eguale al quadrato N insieme con quattro parallelogrammi rettangoli ABC. Perche il *c* quadrato M descritto sopra la somma di AB, e BC, è eguale a i quadrati R, & S, con il doppio del rettangolo ABC, & *d* i due quadrati R, & S sono eguali al quadrato N della differenza AD, insieme con due rettangoli ABC. Adunque il quadrato M sará eguale al quadrato N, insieme con quattro rettangoli ABC. Il che bisognaua &c.

c prop. 19 di questo.
d prop. 20 di questo.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XV.

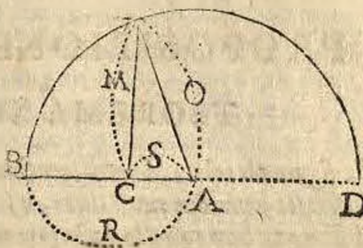
Di Eucl. la 5. e la 6. del 2.

La differenza di due quadrati è eguale al rettangolo contenuto dalla somma, e dalla differenza de i loro lati.

Siano le rette AB, e la sua parte AC, lati de' due quadrati R, & S; e nella AB prodotta verso A *a* facciasi la DA eguale ad AB, verrà ad essere la CB differenza delle due AB, & AC, ma la CD sara eguale alla somma di AB, & AC (per esser AC comune, & AD eguale alla AB) dico che l'eccesso del quadrato R sopra il quadrato S, sarà eguale al rettangolo contenuto da DC in CB. Col centro A, e raggio AB, ò pure AD descriuasi il semicerchio BED; e *b* si eleui da C la retta CE per-

a prop. 3. del 1.
b prop. 10 del 1.

perpendicolare al diametro DB, che incõtri la circonferenza in E; e cõgiungasi la retta AE, e c sopra le AE, e CE descriuansi i quadrati O, & M. Perche *d* nel triangolo AEC rettangolo in C, il quadrato O descritto sopra l'ipotenusa AE, è eguale a due quadrati S, & M descritti sopra i lati AC, e CE intorno all'angolo retto: ma le AB, & AE sono eguali, per esser raggi dell'istesso cerchio; adunque *e* il quadrato R sarà eguale al quadrato O, e per questo il quadrato R sarà eguale a due quadrati S, & M: per loche la differenza de' quadrati R, & S sarà eguale al quadrato M: ma *f* perche nel semicerchio la CE perpendicolare al diametro è media proporzionale trà le DC, e CB porzioni del diametro, *g* sara il quadrato M descritto sopra la media eguale al rettangolo DCB contenuto dall'estreme. Per la qual cosa l'eccesso del quadrato R sopra il quadrato S, sara eguale al rettangolo DCB. Il che si doueua &c.



c *prop. 34 del 1.*

d *prop. 18 di questo.*

e *Dalla prop. 17. del 4.*

f *Dalla prop. 20. del 2. e 9. del 4.*

g *Corol. 2 della pr. 14. del 4.*

PRO-

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA XVI.

D' Eucl. la 9. e 10. del 2.

Delle figure circolari, ò rettilinee ſimili, e ſimilmente deſcritte ſopra due rette linee, e ſopra la ſomma, e differenza loro; quella della ſomma, e quella della differenza inſieme preſe, ſono eguali al doppio delle figure deſcritte ſopra le ſteſſe rette linee.

SOpra le rette linee diſeguali AB, e BC, e ſopra la loro ſomma AC, e ſopra la loro differenza AD ſiano deſcritte qualſiuoglia figure circolari, ò rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte R, S, M, & N. Dico le due figure M deſcritta ſopra l'aggregato, & N ſopra la differenza inſieme preſe, eſſer eguali al doppio delle due figure R, & S. Perche eſsendo le figure quadrati, *a* ſarà il quadrato di AC eguale al quadrato di AD, con quattro rettangoli ABC. Adunque aggiunto communemente il quadrato di AD, ſaranno i quadrati di AC, e di AD inſieme preſi, eguali a due quadrati di AD, con quattro rettangoli ABC: ma *b* i quadrati delle rette linee AB, e BC ſono eguali al quadrato di AD, differenza con due rettangoli ABC.



a prop. 21. di queſto.

b prop. 20 di queſto.

ABC. Adunque due quadrati di AB, con due quadrati di BC, saranno eguali a due quadrati di DA con quattro rettangoli ABC; ma a gli stessi sei spazi erano eguali i quadrati di AC, e di AD insieme presi: adunque il quadrato di AC cō il quadrato di AD, sono eguali a due quadrati di AB con due quadrati di BC. Sendo poi le figure M, N, R, & S cerchi, ò qualunque altre figure simili, e similmente poste sopra le stesse rette linee, perche i *c* quadrati descritti sopra le stesse rette linee anno trà loro la stessa proporzione, che le figure simili M, N, R, & S, e similmente descritte sopra le stesse: adunque *d* la proporzione di egualità, che anno i quadrati di AC, e di AD insieme presi al doppio del quadrato di AB, con il doppio del quadrato BC, la medesima proporzione aranno le figure M, N insieme al doppio delle figure R, & S insieme prese; e perciò le figure M, & N saranno eguali al doppio della figura R, con il doppio della figura S. Il che bisognaua &c.

c *Dalla prop. 17. de' 4 e 12 di questo.*
d *prop. 25 del 3.*



PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XVII.

D' Eucl. la 4. del 13.

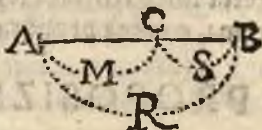
Se sopra tutta, e sopra le porzioni di vna retta linea diuisa secondo la estrema, e meza proporzione saranno descritte figure circolari, ouero rettilinee simili trà di loro, e similmente poste le due figure di tutta, e della minor porzione insieme sono triple della figura descritta dalla maggior porzione. E se le due figure di tutta la linea, e della minor porzione saranno triple di quella, che vien descritta dalla porzion maggiore; sarà tutta la retta linea segata secondo l'estrema, e meza proporzione.

SIa la retta AB segata secondo l'estrema, e meza proporzione nel pũto C, la di cui maggior porzione AC; e siano descritte sopra la AB, AC, e CB tre circolari figure, ò rettilinee R, M, & S simili trà di loro, e similmente poste. Dico che la figura R di tutta insieme con la figura S della minor porzione, sono triple della figura M descritta sopra la porzion maggiore. Perche se le dette figure saranno quadrati, i *a* quadrati descritti sopra le diseguali AB, e BC, saranno eguali al quadrato della differenza AC, con il doppio del rettangolo ABC, ma *b* è il quadrato della AC eguale al rettangolo ABC (per esser quella media proporzionale frà le AB, e BC) adunque i quadrati di AB, e di BC insieme presi, sono eguali al

a prop. 20. di questo.

b *Carol. 2 della pr. 14. del 4.*

al triplo del quadrato AC. Ma *c* la proporzione, che anno i quadrati trà di loro; quella ſteſſa anno ſimilmēte qualunque altre figure R, S, & M ſimili, e ſimilmente deſcritte ſopra le medeſime rettilinee. Adunque le figure R, & S ſaranno eguali al triplo della figura M come fù propoſto.



c Dalla prop. 17. del 4. & 12. di queſto.

Nel ſecondo luogo ſiano le figure R, & S ſopra tutta la AB, e ſopra la minor ſua porzione CB inſieme preſe eguali al triplo della figura M ſimile, e ſimilmente poſta ſopra la maggior porzione AC. Dico la retta AB eſſer ſegata in C ſecondo la meza, & eſtrema proporzione. Perche eſſendo tali figure quadrati, *d* il quadrato di AB, con il quadrato di BC inſieme preſi, ſono eguali al quadrato della differenza AC, con il doppio del rettangolo ABC: ma erano i quadrati di AB, e di BC inſieme preſi eguali al triplo del quadrato di AC. Adunque il triplo del quadrato di AC ſarà eguale ad vn quadrato di AC, con due rettangoli ABC: e tolto comunemente il quadrato di AC, ſaranno i due quadrati di AC eguali à due rettangoli ABC; e però vn ſol quadrato di AC ſarà eguale ad vn rettangolo ABC. *e* Per la qual coſa le trè rette linee BA, AC, e CB ſaranno proporzionali. E perche *f* ſendo le figure R, S, & M qualunque ſimili, e ſimilmente poſte, anno fra di lo-

d prop. 20 di queſto.

e Corol. 2. della prop. 14. del 4.

f Dalle prop. 17. del 4 e 12 di queſto.

T ro

ro la ſteſſa proporzione, che i quadrati deſcritti ſopra le ſteſſe linee. Adunque le ſteſſe rette linee AB, AC, e CB ſaranno proporzionali, e perciò la retta linea AB ſarà ſegata in C, ſecondo la eſtrema, e meza proporzione. Il che &c.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA XVIII.

Di Eucl. la 6. del 13.

Se ſopra l'aggregato di tutta, e della minor porzione, e ſopra la maggior porzione di vna retta linea diuiſa ſecondo la meza, & eſtrema proporzione vi ſaranno deſcritte figure circolari, ò rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte; la figura deſcritta ſopra l'aggregato ſarà quintupla di quella, che ſopra la maggior porzione è deſcritta. E ſe la figura deſcritta ſull'aggregato di tutta, e della porzione minore ſarà quintupla di quella, che è deſcritta dalla porzione maggiore, ſarà diuiſa tutta la retta linea ſecondo la meza, & eſtrema proporzione.

SIa la retta linea AB ſegata ſecondo l'eſtrema, e meza proporzione in C, la di cui minor porzione CB, e prodotta la BD eguale alla minor porzione CB ſopra la AD aggregato delle due AB, e BC, e ſopra la loro differenza, cioè ſopra la maggior AC ſiano fatte qualunque figure circolari, ò rettilinee R, & M ſimili tra di loro, e ſimilmente poſte. Dico la figura R eſſer quintupla della figura M. *a* Deſcriuaſi ſopra tutta la

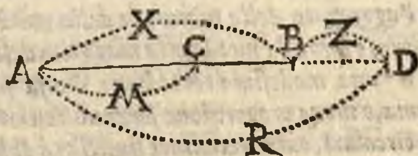
a prop. 14. *del* 4.

AB,

AB, e ſopra la BD, chè è eguale alla ſua minor porzione BC due figure X, e Z ſimili alle figure R, & M, e ſimilmente poſte. E perche AB ad AC ſta come AC á CB, *b* adunque alle due figure X, e Z è eguale il triplo della figura M; e però al doppio delle figure X, e Z ſaranno eguali ſei figure M. Ma *c* la figura R della ſomma, e la M della differenza inſieme preſe, ſono eguali al doppio delle figure X, e Z: adunque le figure R, & M ſono eguali à ſei figure M; e però la ſola figura R ſarà quintupla della figura M. Il che &c.

b *prop. 24 di queſto.*

c *prop. 23 di queſto.*



Nel ſecondo luogo ſia la figura R quintupla della figura M (rimanendo tutte le altre coſe come nel primo caſo). Dico che la AB ſarà ſegata in C ſecondo la meza, & eſtrema proporzione. Perche la R è quintupla della M: adunque le R, & M inſieme preſe ſaranno eguali à ſei figure M: ma *d* alle ſteſſe figure R, & M inſieme preſe deſcritte ſopra la ſomma, e la differenza delle due AB, e BC ſono eguali il doppio della figura X, con il doppio della figura Z. Adunque il doppio delle figure X, e Z ſarà eguale a ſei figure M; e

d *prop. 23 di queſto.*

le figure X, e Z insieme saranno eguali al triplo della figura M. Laonde e la retta AB in C sarà segata secondo la meza, & estrema proporzione. Il che &c.

e prop. 24 di questo.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XIX.

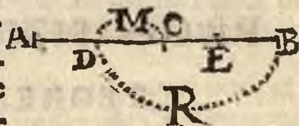
Di Eucl. la 3. del 13.

Se sopra l'aggregato della minore, e della metà della maggiore, e sopra la metà della maggiore delle porzioni d'vna medesima retta linea diuisa secondo l'estrema, e meza proporzione saranno descritte due figure circolari, ouero rettilinee simili trà di loro, e similmente poste, la figura, che vien sull'aggregato descritta è quintupla di quella, che vien descritta sopra la metà della porzione maggiore. E se la figura dell'aggregato della minor porzione, e della metà della maggiore sarà quintupla della figura, che è descritta sopra la metà della maggiore porzione; Tutta la retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e meza proporzione.

SIa tutta la retta BA alla AC, come la AC alla minor porzione CB; e sia segata la AC in parti eguali nel punto D; e sopra la BD aggregato della porzion minore BC, e della DC metà della maggiore, e parimente sopra la DC metà della maggiore siano descritte qualunque figure R, & M circolari, ò rettilinee simili, e similmente poste. Dico la figura R esser quintupla della figu-

ra

ra M. Si *a* seghi la CB per il mezo in E; e perche la *b* DC alla CE stà come la AC doppia della prima, alla CB doppia della seconda; & è la AB segata nel punto G secondo l'estrema, e meza proporzione. Adunque *c* la DE ancora è segata nel punto C, secondo la meza, & estrema proporzione, la di cui porzione minore sarà CE. Ed essendosi descritte due figure simili, e similmente poste, cioè la R sopra la DB aggregato di tutta la DE, e la EB, ouero lá EC minor porzione; e la figura M sopra la maggior porzione DC. Adunque *d* la figura R è quintupla della figura M. Il che bisognaua prouare nel primo luogo. Nel secondo luogo la figura R descritta sopra la DB aggregato della porzione minore CB, e della DC metà della porzione maggiore sia quintupla della figura M simile á lei, e similmente descritta sopra la DC metà della maggior porzione AC. Dico che tutta la retta AB è segata nel punto C, secondo l'estrema, e meza proporzione. Segata *e* la CB in parti eguali nel punto E. Perche la figura R sopra l'aggregato di tutta la DE, e della minor porzione CE, ò sopra la EB descritta, si suppone esser quintupla della figura M simile alla prima, e similmente descritta sopra la maggior porzione DC. Adunque *f* la retta DE è segata in C, secondo la meza, & estre-



a prop. 9. del 1.
b prop. 11 del 3.
c prop. 26 del 4.
d prop. 25 di questo.
e prop. 9. del 1.
f prop. 25. di questo.

ma proporzione. Ma come g la DC alla CE, così sta la AC doppia della prima, alla CB doppia della seconda. Adunque h ancora la retta AB è segata nel punto C, secondo l'estrema, e meza proporzione, la di cui minor porzione è la CB. Il che doueasi dimostrare.

g prop. 11 del 3.
h prop. 26 del 4.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XX.

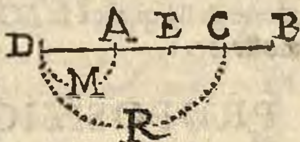
Di Eucl. la 1. del 13.

Se sopra l'aggregato della metà di tutta, e della sua porzion maggiore, e sopra la medesima metà della retta linea diuisa, secondo l'estrema, e meza proporzione saranno descritte due qualunque figure circolari, ouero rettilinee simili trà di loro, e similmente poste, la figura, che vien descritta sull'aggregato è quintupla della figura, che è descritta sopra la metà di tutta la retta linea. E se la figura dell'aggregato della metà di tutta la linea, e della di lei porzione maggiore sarà quintupla della figura à lei simile, e similmente descritta sopra la metà di tutta la retta linea sarà diuisa secondo la meza, & estrema proporzione.

SIa la retta linea AB segata nel punto C secondo la meza, & estrema proporzione, la maggior porzione della quale sia AC; e sia prodotta la AD eguale alla metà di tutta la AB; e sopra la DC aggregato della porzione maggiore AC, e di DA metà di tutta la linea, e parimente sopra

la DA metà di tutta siano descritte due figure circolari, ouero rettilinee R, & M simili trà di loro, e similmente poste. Dico la figura R dell' aggregato esser quintupla della figura M descritta sopra la metà di tutta. Si seghi la *a* AC in parti eguali; e perche *b* la DA alla AE, stà come la BA doppia della prima alla AC doppia della seconda, ouero *c* come la AC alla CB, essendo la AB segata nel punto C secondo la meza, & estrema proporzione. Adunque *d* la DE ancora vien segata nel punto A, secondo la meza, & estrema proporzione, la di cui minor porzione è la AE. Ed essendo le due figure simili, e similmente poste, cioè la R descritta sopra l' aggregato di tutta la DE, e della minor porzione EC, ouero AE; e la figura M descritta sopra la di lei maggior porzione DA. Adunque *e* la figura R è quintupla della figura M. Il che bisognaua &c.

a *prop. 9. del 1.*
b *prop. 11 del 5.*
c *prop. 5. del 4.*
d *prop. 26 del 4.*
e *prop. 25 di questo.*



Nel secondo luogo la figura R descritta sopra la DC aggregato, DA metà di tutta la AB, e della porzion maggiore, AC sia quintupla della figura M à lei simile, e similmente descritta sopra la DA metà di tutta la AB. Dico che tutta la retta linea AB è segata in C, secondo la meza, & estrema proporz one. Si seghi *f* AC in parti eguali in E; e perche la figura R descritta sopra la DC

f *prop. 9. del 1.*

aggregato di tutta la DE, e della di lei minore porzione EC, ò pure AE è quintupla della figura M à lei simile, e similmente descritta sopra la differenza, ò sopra la maggior porzione DA. Adunque g la DE è segata nel punto A secondo l'estrema, e meza proporzione: ma h come la DA alla AE, così stà la BA doppia della prima alla AC doppia della seconda. Adunque similmente i la retta AB vien segata in C, secondo l'estrema, e meza proporzione, la maggior porzione della quale è la AC. Il che bisognaua dimostrare.

g *prop. 25 di questo.*
h *prop. 11 del 3.*
i *prop. 26. del 4.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA XXI.

D' Eucl. la 12. del 2.

Ne' triangoli ottusangoli il quadrato descritto sopra il lato, che sottende l'angolo ottuso è eguale à i due quadrati de gli altri due lati insieme con due rettangoli contenuti da vn de' lati intorno all' ottuso, e da llo slungamento del medesimo fino alla perpendicolare cadente dall'angolo opposto.

NEl triangolo ABC sia l'angolo CBA ottuso, e dall'angolo C cada sopra la retta AB prodotta la perpendicolare CD, che a l'incontrerà fuor del triangolo della parte del conseguente angolo CBD. E sopra i lati del triangolo AC, AB, e BC si descriuano i quadrati X, R, & S. Dico che il quadrato X descritto sopra il lato sut-

a *Cauasi dal Corol. della pr. 18. del lib. 1.*

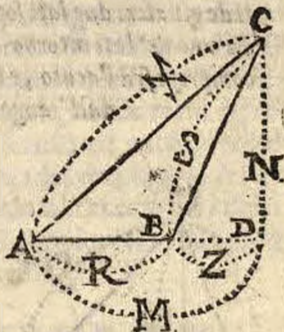
ſuttendente, l'angolo ottuſo è eguale à i due quadrati R, & S de i lati, che comprendono il medeſimo angolo, inſieme con due rettangoli ABD. Sopra *b* le rette linee AD, DB, e DC ſi deſcriuano i quadrati M, Z, & N. Perche nel triangolo ADC l'angolo D è retto. Adunque *c* il quadrato X è eguale à i due quadrati M, & N: ma *d* il quadrato M dell'aggregato delle due AB, e BD è eguale à i due quadrati R, e Z delle medeſime, inſieme con due rettangoli ABD. Adunque il quadrato X ſarà eguale a i quadrati R, Z, & N con due rettangoli AB D. e Ma è il quadrato S eguale à i due quadrati Z, & N (imperciòche nel triangolo CBD, l'angolo D è retto) adunque il quadrato X ſarà eguale à i due quadrati R, & S inſieme cō il doppio del rettangolo ABD. Il che biſognaua &c.

b *prop. 34 del 4.*

c *prop. 18. di queſto.*

d *prop. 19 di queſto.*

e *prop. 18 di queſto.*



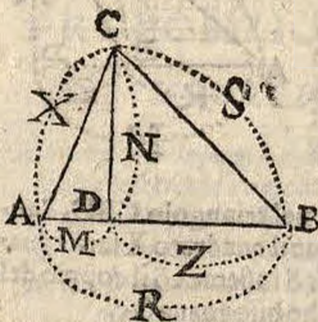


PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA XXII.

D' Eucl. la 13. del 2.

In qualsiuoglia triangolo il quadrato del lato, che suttende l'angolo acuto è eguale all'eccesso de i quadrati degli altri due lati sopra due rettangoli contenuti da vno de' lati intorno all'acuto, e dalla porzione compresa frà l'acuto, e la perpendicolare cadente dall' angolo opposto.



NEl triangolo ABC, il di cui angolo B sia acuto, siano descritti sopra i suoi lati i quadrati X, R, & S, e dall'angolo C cada sopra la AB la perpendicolare CD, *a* che la segarà dalla parte dell'angolo acuto in D. Dico che il quadrato X del lato opposto all'angolo acuto è eguale all'eccesso de i due quadrati R, & S sopra due rettangoli ABD. Sopra *b* le rette linee AD, DB, e DC descriuansi i quadrati M, Z, & N. Perche *c* nel triangolo ACD, l'angolo D è retto; adunque il quadrato X è eguale à i due quadrati M, & N insieme, & aggiunto comunemente il doppio del rettangolo ABD sarà il qua-

a Cauasi dal Corol. della prop. 18. del 1.

b prop. 34 del 1.

c prop. 18. di questo.

quadrato X insieme con due rettangoli A B D eguale à i due quadrati M, & N, con i due rettangoli ABD. *d* Ma i due quadrati R, e Z sono eguali al quadrato M della differenza delle due AB, e BD con due rettangoli ABD. Adunque il quadrato X, & i due rettangoli ABD tutti insieme presi saranno eguali à i quadrati N, R, e Z insieme presi: *e* ma è il quadrato S eguale à i quadrati N, e Z insieme presi (poi che nel triangolo CBD l'angolo D è retto) adunque il quadrato X insieme con il doppio del rettāgolo ABD, verrà eguale à i due quadrati R, & S insieme presi; e tolto via comunemente il doppio del rettangolo ABD resterà il quadrato X eguale all'eccesso de i due quadrati R, & S sopra il doppio del rettangolo ABD. Il che bisognaua &c.

d *prop. 20 di questo.*

e *prop. 18 di questo.*

PROPOSIZIONE XXX.

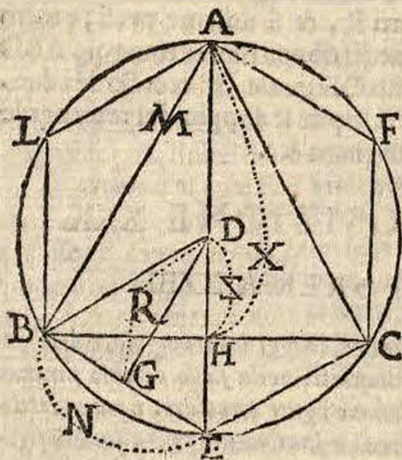
TEOREMA XXIII.

Se sopra i lati, altezze, e raggi del triangolo, e dell'esagono regolari inscritti nello stesso cerchio saranno descritte qualunque figure circolari, ò pure rettilinee trà loro simili, e similmente poste: sarà la figura del lato del triangolo tripla della figura del lato dell' esagono, sesquiterza della figura dell' altezza del triangolo, e duodecupla della figura del raggio del medesimo, & eguale alla figura descritta dall' altezza dell' esagono, e quadrupla della figura descritta dal raggio dell' esagono.

D' Eucl. la 12. del 13.

Nel

NEl cerchio, il di cui raggio DA siano inscrit ti il triangolo ABC, e l'esagono ALBC re golari; & il raggio AD, *a* il quale sega per mezo l'angolo BAC *b* segarà ancora l'arco BC in E, & il lato suttesο BC in parti eguali, e perpendi colarmente in H; e perciò la ADE sarà vna ret ta linea, & diametro. Si *c* tiri poi la DG perpen dicolare sopra la BE, e si congiunga la BD e si pongano qualunque figure circolari, oue ro rettilinee simili, e similmente poste, cioè M sopra il lato AB del trian golo, N so pra il lato Bl dell'esagono X sopra l'al tezza AH de triangolo, Z sopra il rag gio DH de triangolo, e R sopra il raggio DG dell'esagono. Dico la figu ra M essere eguale alla figura dell'altezza dell'esagono, e quadrupla della figura R, e tripla della figura N e sesquiterza della figura X, e duodecupla della figura Z. Perche *d* i due angoli FAB, EBA sono retti ne' semicerchi EBA, & FAB. Adunque e l' AB



a Dalla prop. 3. di questo.
b *prop.19 dei 2.*
c *prop.11 del 1.*
d *prop.20 del 2.*
e *prop.14. del 1.*

AB ſarà la diſtanza de' lati AF, BE equidiſtanti nell' eſagono; e perciò la AB ſarà l'altezza dell' eſagono. Di poi *f* perche il triãgolo DBE è equilatero, g ſaranno le altezze di lui ſopra tutti i ſuoi lati eguali frà di loro, e però ſarà la perpendicolare DG dalla cima alla baſe eguale alla perpendicolare BH metà del lato BC, ouero del lato AB del triangolo ABC; e la baſe *h* DE ſarà ſegata per mezo in H; & è il raggio AD eguale à DE. Adunque la AH altezza del triangolo ſarà tripla della HE, ouero di HD raggio del triangolo: e per queſto *i* di quali parti la figura Z è vna, la figura X ſarà noue parti, e la figura N quattro parti (auuenga che la BE lato dell' eſagono è eguale al raggio del cerchio DE doppio della DH) in oltre perche nel triãgolo ABE dall' angolo *k* retto B, la perpendicolare BH ſega la baſe AE in H. Adunque *l* le EA, BA, & AH ſono proporzionali: e perciò *m* la figura M alla X auerà duplicata proporzione di quella de i lati, *n* cioè ſarà come la EA alla AH, ouero come quattro a trè, ò pure come dodici a noue. Ma la DG è la metà della AB. Adunque *o* di quali parti la figura M è dodici, la figura R ſarà trè parti; ed era delle medeſime la figura Z vna parte. Adunque la figura M del lato del triangolo, e dell'altezza dell'eſagono è duodecupla della figura Z, e tripla della figura N, e quadrupla della figura R, e ſeſquiterza della figura X. Il che biſognaua &c.

f *Dalla prop. 8. di queſto.*
g *Dalla prop. 1. del 4.*
h *Dalla prop. 2. del 2.*
i *Dalla prop. 17. del 4.*
k *prop. 20 del 2.*
l *prop. 9. del 4.*
m *pr. 17. del 4*
n *prop. 19 del 3.*
o *Dalla prop. 17. del 4.*

PRO-

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA XXIV.

Se ſopra i lati, altezze, e raggi del quadrato del triangolo, e dell' eſagono regolari inſcritti nel medeſimo cerchio, faranſi quali ſi vogliano figure circolari, ò rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte; la figura del lato del quadrato ſarà doppia della figura del lato dell'eſagono ſuſſeſquialtera della figura del lato del triangolo, quadrupla della figura del raggio del quadrato, ottupla della figura del raggio del triangolo, dupla ſuperbiparziente terza della figura del raggio dell' eſagono, ſuſſeſquialtera della figura dell'altezza dell' eſagono, e ſuſſeſquiottaua della figura dell' altezza del triangolo.

NEl cerchio, il di cui raggio EA, ſia inſcritto il quadrato ABCD, il raggio del quale EH, e ſiano deſcritte qualunque figure circolari, ò rettilinee ſimili, e ſimilmēte poſte, cioè M ſopra il lato AB del quadrato, ò ſopra la di lui altezza, X ſopra il raggio EH, & N ſopra il raggio AE del cerchio, & altre figure ſimili à queſte, ſopra i lati, raggi, & altezze del triangolo, e dell'eſagono inſcritti nel medeſimo cerchio. Si dee dimoſtrare, che la figura M hà all' altre figure le ſpoſte proporzioni. Si congiunga la retta EB. Perche *a* l'angolo AEB al centro del quadrato è retto, e dall'angolo retto cade la perpēdicolare EH ſopra

a *Dalla prop. 3. di queſto.*

ſopra la baſe AB, diuidendola b per mezo, eſſendo tirata dal centro del cerchio. Adunque c la retta EA è media proporzionale trà la AB, e la AH, e parimente la retta EH è media proporzionale trà le eguali porzioni BH, HA; e per queſto la EH ſarà eguale alla metà della AB; onde d la figura M del lato del quadrato ſarà quadrupla della figura X del raggio del medeſimo; e parimente e la figura M alla figura N a lei ſimile, ſara come la BA alla ſua metà AH: e perciò di quali parti la figura M è otto, ſarà la figura X due parti, e la figura N del raggio del cerchio, ò pure f del lato dell' inſcritto eſagono regolare, ſarà quattro; ma di g quali la figura del lato dell'eſagono è quattro parti, la figura della di lui altezza fù dodici, e la figura del di lui raggio trè, e delle medeſime la figura del lato dell' inſcritto triangolo regolare fù dodici parti, e la figura della ſua altezza parti noue, e la figura del ſuo raggio parte vna. Adunque la figura M del lato del quadrato, ouero della ſua altezza, ſarà quadrupla della figura del ſuo raggio, doppia della figura del lato dell' eſagono, ſuſſeſquialtera della figura della di lui altezza, doppia ſuperbiparziente terze della figura del raggio del medeſimo, e ſuſſeſquialtera della figura del lato del trian-

b prop. 2. del 2.

c prop. 9. del 4.

d Dalla prop. 19. del 4.

e Della ſteſſa.

f dalla pr 8. di qu.

g prop. 3. di queſto.

triangolo, ottupla della figura del di lui raggio, e ſuſſeſquiottaua della figura dell'altezza del medeſimo triangolo. Le quali tutte coſe biſognaua &c.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA XXV.

D'Eucl. la 10. del 13.

Se ſopra i lati del pentagono, dell'eſagono, e del decagono regolari inſcritti nel medeſimo cerchio ſi faranno qualunque figure circolari, ò rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte; la figura del lato del pentagono ſarà eguale à le due figure del lato dell'eſagono, e dal lato del decagono inſieme preſe.

a Dalla prop. 8. di queſto.

b prop. 19 del 2.

c dalla prop. 3. di queſto.

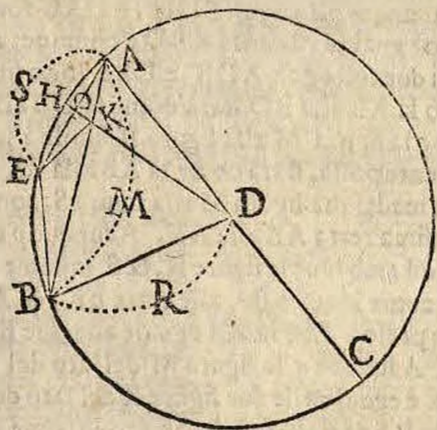
d prop. 19 del 2.

NEl cerchio ACB ſia AB lato dell'inſcritto pentagono, EA lato dell'inſcritto decagono regolari, & *a* il raggio DB ſarà il lato dell inſcritto eſagono; e ſopra queſti lati ſiano deſcritte qualunque figure circolari, ouero rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte, cioè M ſopra la AB, R ſopra la DB, & S ſopra la EA. Dico che la figura M è eguale alle due figure R, & S inſieme preſe. Si ſeghi *b* l'arco AE ſutteſo dal lato del decagono in parti eguali in H, ſi *c* come in parti eguali s'era ſpartito in E l'arco AB, e ſara l'arco AH la quarta parte dell'arco AB, e terza parte dell arco BH; e ſi congiunga il raggio DH, *d* che ſeghi in parti eguali, e perpendicolarmente il lato del decagono nel punto O, & AB nel punto K:

con-

congiunganſi le EK, BE,& il diametro AC. Perche ne'triangoli AOK, & EOK intorno à gli angoli retti eguali ad O, i due lati AO, & EO ſono eguali, & OK comune. Adunque *e* l'angolo KEA è eguale all'angolo KAE; ed eguali *f* ſono ancora gli angoli EBA, & EAB, inſiſtendo ſopra

e prop. 4. del 1.
f prop. 17. del 2.



eguali circonferenze EA, BE; adunque gli angoli AEK, ABE ſono eguali, & è l'angolo BAE comune ne' triangoli BEA, EKA. Adunque *g* ſono ſimili trà di loro. Laonde la BA alla AE ſtarà come la EA alla AK, e perciò la figura *h* M alla figura S à lei ſimile, e ſimilmente poſta, ſtarà come la BA alla AK. In oltre perche ſi come *i* l'arco EA è la decima parte di tutta la circonferenza ABGA, così *k* l'arco AH metà di quello, è la

g Dalla prop. 4. del 4.
h Dalla prop. 17. del 4.
i Dalla prop. 3. di queſto.
k prop. 10 del 3.

decima parte della meza circonferenza ABC, & è l'arco BH triplo dell'arco AH; Adunque di quali parti l'arco ABC è dieci, l'arco BH ne farà trè parti, & BC sei; e perciò l'arco BC sarà doppio dell'arco BH; e *l* l'angolo CDB sarà doppio dell'angolo BDH: ma l'angolo *m* CDB al centro è doppio dell'angolo BAC alla circonferenza. Adunque gli angoli BDH, e DAB sono trà di loro eguali, e l'angolo ABD è comune; Adunque *n* i due triangoli ADB, e DBK sono simili; e perciò la AB alla BD starà come la DB alla BK. Onde *o* la figura M alla figura R simile à lei, e similmente posta, starà come la AB alla BK; ma era la medesima figura M alla figura S, come la medesima retta AB alla AK. Adunque *p* la figura M ad ambedue le figure R, & S insieme prese, starà come la retta BA alle rette BK, & AK insieme prese. Et è la BA eguale alle due BK, e KA. Adunque *q* la figura M del lato del pentagono è eguale alle due figure R del lato dell'esagono, & S del lato del decagono insieme prese. La qual cosa bisognaua &c.

l *Corol dalla pr.* 17. *del* 2.
m *pr.* 12. *del* 2.
n *Dalla prop.* 4. *del* 4.
o *Dalla prop.* 17. *del* 4.
p *Dalla prop.* 22. *del* 3.
q *Corol. della pr.* 16. *del* 3.



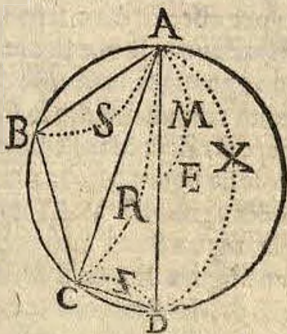
PRO-

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA XXVI.

Se sopra il lato dell'esagono, del pentagono, e sopra la suttendente l'angolo del pentagono inscritti nel medesimo cerchio saranno descritte qualunque figure circolari, o rettilinee simili, e similmente poste; le figure del lato del pentagono, e della suttendente l'angolo del pentagono insieme prese, saranno eguali al quintuplo della figura del lato dell'esagono.

NEl cerchio, il cui raggio EA, siano la AB, e la BC due lati del pentagono, e la retta AC suttenda l'angolo del pentagono, e vi siano descritte qualunque figure circolari, o rettilinee simili, e similmẽte poste, cioè M sopra il raggio EA, ò *a* sopra il lato dell'esagono, R sopra la AC, & S sopra la AB. Dico che le figure R, & S insieme prese sono eguali al quintuplo della figura M. Producasi il diametro AED, e congiungasi la retta CD. Perche *b* l'arco AB è la quinta parte di tutta la circonferenza ABDA; si che di quali parti la circonferenza del cerchio



a Dalla prov. 8. di questo.

b Dalla prop. 3. di questo.

ABDA è dieci parti, la circonferenza AB sarà due, e la circonferenza ABC quattro; ma delle medesime parti la circonferenza ACD del semicerchio ne è cinque: Adunque la circonferenza CD è vna decima parte di tutta la circonferenza del cerchio; e perciò la retta *c* CD sarà il lato dell'inscritto decagono regolare. Ponganssi adesso le figure X, e Z simili alle M, R, & S, e similmente poste sopra il diametro AD, e sopra il lato del decagono CD. Perche *d* l'angolo ACD è retto nel semicerchio. Adunque *e* la figura X dell'ipotenusa è eguale alle due figure R, Z insieme prese, & è la figura *f* X quadrupla della figura M (per essere il diametro DA doppio del raggio AE) adunque le due figure R, e Z insieme prese sono eguali al quadruplo della figura M. Et aggiunta comunemente la figura M, saranno le trè figure R, Z, & M insieme prese eguali al quintuplo della figura M, *g* ma alle due figure Z del lato del decagono, & M del lato dell'esagono è eguale la figura S del lato del pentagono: adunque le due figure R, & S sono eguali alle trè figure R, Z, & M. Perloche le due figure R, & S eguali saranno al quintuplo della figura M. Il che bisognaua dimostrare.

c La stessa.

d prop. 20 del 2.

e prop. 18. di questo

f Dalla prop. 17. del 4.

g prop. 32 di questo.

Fine del libro quinto.

Er-

Errori occorsi nello stampar da emendarsi.

F*Accia* 17. *verso* 11. *di modo che.f.*21.*v.*26. *la Postilla cancellisi.f.*30.*v.*6.*c.ass.*8.*f.*32.*v.*23.*sarà ella.* 34.*v.* 14. *linea GEH. f.*37.*v.*7. *e EHC.f.*41. *v.*25.*b.* rop. 15.*f.*45.*v.*8. *Euclid.* 20. *f.*47.*v.*17. *à prop.*21.*f.* 8.*v.*14. *delle rimanenti. f* 50.*v.*7. *costituire.f.* 53.*v.*4. DC.*f* 56.*v.* 11.*in C.v.*23. *ò vero al.f.*57.*v.* 4.*o pr.* 16. 59.*v.*3. *Euclid. dimanda* 5.*f.*60.*v.*30, *linea EF. e così* a *sua parallela BC. (per esser gli angoli alterni FGE. &* BE. *eguali, per la pr.*16. *&* 17. *) sarà.f.*65.*v.*18.*Euclid.* 41.*f* 66.*v.*19.*DEF.f.*69.*v.*7. *& AB.f.*72.*v.*12.25.*del* libro.*f.* 78.*v.* 21. *lib* 3.*f* 81.*v* 27.*DN. e però.f.*94 *v.*25. .*pr.*9. *f.*98.*v.* 12. *& DKF. f.* 106.*v.*23. *ai due lati. f.* 107.*v.*30. *porzione ABC.f.* 112.*v.*17 *Euclid.*32.*f.*119. .21.*prop.*16.*f.*120.*v.*3. *GB, BF.f.*122.*v.*20.*ed è.f.*132. .12. *non sarà maggiore. f.* 135.*v.*5. *sia D. f.*137. *v.*22. ella *IK.f.*141.*v.*3. *& la H.f.*149.*v.*10. *che à C. v.* 19. erche *E è.f.*160.*v.*19. *& Def.*12.*f.* 180. *v.* 19. *H sopra* a *prima.f.*182.*v.*3. *Euclid. def* 8.*f.*148. *v.*6. *ò vero di C.* 187.*v.*13. *BG, EH.f.*190.*v.*18. *il triangolo ASC.v.*20. ome *SC.v.*24. *SC. & il triangolo ASC. v.*30. *cioè al triangolo ABC.f.*194.*v.*7 *è altezza.f.*202.*v.*14. *à i lati homologhi.f.*205.*v.* 18. *Euclid.* 11. *&* 13. *del* 6.*f.*207.*v.* 3. *parallele ad AG.f.*218.*v.*5. *Euclid.* 20. *del* 6.*f* 219. .23. *homologo HK. f.*221.*v.*20 *&* 43. *del* 1.*f.* 222.*v.* 20. *ad GF. & .f.* 223 *v.*22.*Euclid.*44 *&* 45.*del* 1.*f.*225. .8. *Euclid.*14.*del* 2. *&* 25.*del* 6.*f.*233.*v.*13. *Euclid.*11. *del* 2. *&* 30.*del* 6. *v.*26. *prop.* 13.*del* 3.*f.*246.*v.* 19.*Eu-*

clid.

clid. 3.7. 12. del 4. f. 258. v. 4. della prop. 6. del primo. f.
262 v. 22. EM. di maniera. f. 276. v. 3. f. dalla prop. 14.
279. v. 7. l'angolo. f 282. v. 3. sopra la. f. 283. v. 16. E
clid. 8. del 2. f. 289. v. 7. rette linee. f. 295. v. 8. prop. 2
v. 25. aggregato di DA. f 296. v. 25. angolo acuto CBD. f
300. v. 6. prop. 19. e dalla 3. del 2. f 301. v. 9. prop. 3
del 1. f. 302. v. 21. à queste, e similmente poste.



V.D.

V. D. Stephanus Seminus Cler. Reg. S. Pauli Pœnit. pro Illuſtriſs. ac Reuerendiſs. D. D. Hieronymo Boncompagno Bononiæ Archiepiſcopo, & Principe.

Imprimatur

Fr. Paulus Hieronymus de Garrexio Mag. & Vicarius Gener. S. Officij Bononiæ.